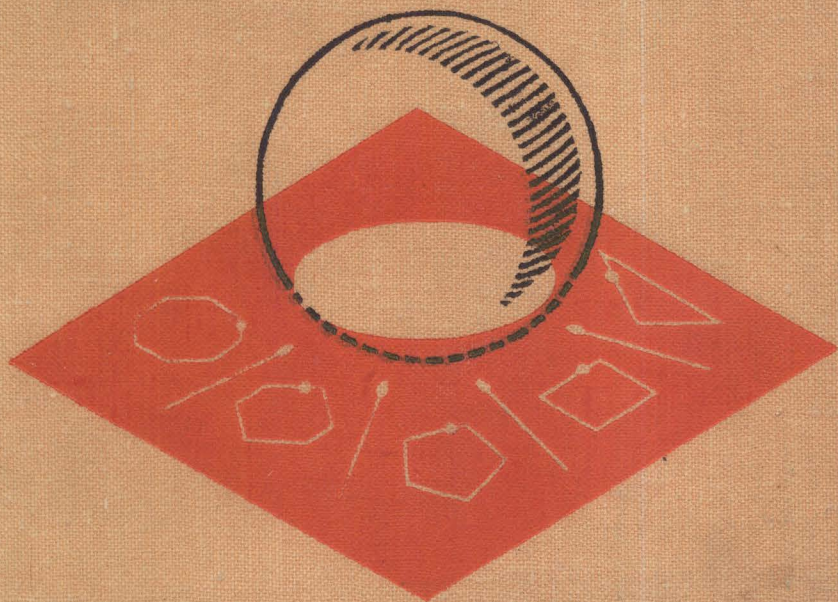

Э. Эбботт

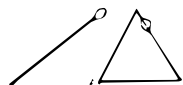
ФЛАТЛАНДИЯ

Д. Бюргер

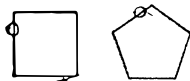
СФЕРЛАНДИЯ



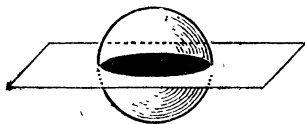




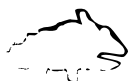
Э.Э.Эбботт



ФЛАТЛАНДИЯ



Д. Бюргер



СФЕРЛАНДИЯ



Перевод Ю. А. Данилова
Под редакцией Я. А. Смородинского

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА

1976

Эбботт Э. Э.

Э13 Флатландия. Пер. с англ. Ю. А. Данилова.

Бюргер Д.

Б98 Сферландия. Пер. с голл. Ю. А. Данилова.

Ред. Я. А. Смородинский, М., «Мир», 1976.
358 с. с илл.

Произведения Э. Эбботта и Д. Бюргера едины по своей тематике. Авторы в увлекательной форме с неизменным юмором вводят читателя в русло важных геометрических идей, таких, как размерность, связность, кривизна, демонстрируя абстрактные объекты в различных «житейских» ситуациях.

Книга дополнена научно-популярными статьями о четвертом измерении. Ее с интересом и пользой прочтут все любители занимательной математики.

Э $\frac{20202-207}{041(01)-76}$ 207-76

513

*Редакция научно-популярной и
научно-фантастической литературы*

© Перевод на русский язык, «Мир», 1976

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многомерные пространства давно утратили тот ореол таинственности, которым они были некогда окутаны. Идеи и методы многомерной геометрии (причем не только евклидовой, но и неевклидовой) находят ныне столь широкое применение, что трудно понять, как наши предки могли обходиться без них. К услугам многомерной геометрии прибегают химик, исследующий свойства многокомпонентных систем, и физик, пытающийся выяснить отдельные подробности поведения многих тел (трудности проблемы n тел столь велики, что вынуждают говорить о «многих телах» всякий раз, когда $n \geq 3$), астроном и биолог. Проектировщик машин, создавая зубчатую передачу с большим числом шестерен, также вынужден будет воспользоваться методами многомерной геометрии, если хочет, чтобы его творение не просто соответствовало назначению, а выполняло свою функцию (в том или ином смысле) оптимально.

Четырехмерное евклидово пространство, ближайшего по размерности соседа привычного нам трехмерного пространства, постигла та же участь, что и другие многомерные пространства: оно утратило былую экзотичность и стало привычным инструментом в руках современного исследователя.

Четырехмерный мир — далеко не самое удивительное из того, что создано математической мыслью. Пытаясь найти ответы на внешне простые, но в действительности необычайно глубокие вопросы, математики совершили немало удивительных открытий. Они узнали, что существует не одна, а несколько геометрий, что размерность геометрической фигуры нельзя определять по такому интуитивно очевидному признаку, как «запас» принадлежащих фигуре точек, поскольку, например,

множество точек, составляющих отрезок, равномощно множеству точек, составляющих квадрат или куб (иначе говоря, отрезок содержит «столько же» точек, сколько их содержит квадрат или куб), что размерность пространства не обязательно должна быть конечной и даже целой.

Не следует думать, будто столь странное на первый взгляд понятие, как нецелая размерность, является своего рода математическим курьезом и не имеет отношения к действительности.

Как доказывается в механике, простейшая из задач N тел — задача трех тел — приводит к необходимости рассматривать пятимерное пространство, а при произвольном $N \geq 3$ — пространство с числом измерений, равным $3N - 4$. Но почему нельзя считать N нецелым? Что мешает нам, например, говорить о π -мерном мире? Формулы n -мерной геометрии нам удастся без особых ухищрений распространить на случай $n = \pi$. Но самое главное состоит в том, что представление о нецелых размерностях оказывается весьма эффективным в теории фазовых переходов и теории поля. При рассмотрении некоторого процесса в системе с огромным числом частиц (или степеней свободы) может оказаться, что со временем в него вовлекаются все новые и новые частицы (участвует все большее число степеней свободы). Поэтому и число переменных, которые приходится учитывать в уравнениях, меняется со временем. Быть может, число переменных удобно считать не дискретной, как обычно, а непрерывной величиной. Тут-то и появляются пространства размерности π , $\sqrt{2}$ и 1,879. Правда, трудно сказать, понадобится ли кому-нибудь рассматривать треугольник в π -мерном пространстве и нужно ли выяснять, чему равна сумма его углов. Возвращаясь из π -мерного пространства в «обычное» 4-мерное, невольно испытываешь большое облегчение — настолько все становится простым и понятным!

Изучать многомерные, и в частности четырехмерные, пространства можно по-разному. Ничто не мешает, например, воспользоваться аксиоматическим методом, неоднократно доказавшим свою мощь, тем более, что, по словам известного геометра Г. С. М. Кокстера, «аксиоматический подход рассеивает таинственность, не уменьшая очарования самой идеи».

Однако для первого знакомства с четырехмерным миром нам кажется более подходящим метод аналогии. Основываясь на наглядно-геометрических представлениях о размерности геометрических фигур, мы можем совершать постепенное восхождение по шкале размерностей и переходить от одномерных фигур к двумерным, от двумерных — к трехмерным и, наконец, сделать решающий шаг: воспользоваться замеченными закономерностями и перейти к рассмотрению четырехмерных фигур. Таков обычный путь использования аналогии — лестницы, ведущей от известного к неизвестному и позволяющей не только овладевать накопленными знаниями, но и открывать новое. Менее традиционное применение аналогии состоит в том, что мы мысленно пытаемся представить себе трудности, с которыми сталкивается двумерное существо при попытке наглядно вообразить себе третье измерение, и экстраполируем свое превосходство над обитателем двумерного мира... на самих себя!

Именно этот не совсем обычный способ изучения (или, лучше сказать, «постижения») геометрии четырехмерного евклидова пространства и искривленного расширяющегося пространства избрали авторы «Флатландии» и «Сферландии»: английский педагог Эдвин Э. Эбботт и голландский ученый Дионис Бюргер. Написанные в разное время различными авторами и на разных языках, эти произведения объединены не только преемственностью тематики, но и «родственными узами» героев, от лица которых ведется повествование. Если у Эбботта в роли рассказчика выступает Квадрат, то у Бюргера его сменяет Шестиугольник, который доводится Квадрату внуком. Мир, в котором живет Шестиугольник, устроен гораздо сложнее евклидовой плоскости его деда: этот мир искривлен (Шестиугольник обитает на поверхности огромной сферы) и к тому же расширяется. В этом различии — отзвук великих перемен в воззрениях на природу реального пространства, происшедших с выхода в свет первого издания «Флатландии» (1880 г.) до появления «Сферландии» (1957 г.). Юмор, причудливая, подчас гротескная литературная форма, множество убедительных математических подробностей двумерного бытия сделали произведения Эбботта и Бюргера необычайно популярными. Их (наравне с бессмертной

«Алисой» Льюиса Кэррола) охотно цитируют авторы серьезных научных трактатов по многомерной геометрии и теории относительности.

Не следует думать, будто произведения Эбботта и Бюргера, столь разительно отличающиеся от обычных «курсов», «введений» и «популярных очерков», служат своего рода четвертым измерением, «перпендикулярным» всей прочей литературе по занимательной математике. Яркие и самобытные, эти книги преследуют ту же цель, что и их «трехмерные» (то есть более привычные по форме) сородичи по жанру: учить математике так, как постигают мир дети, — играя. Именно общность цели в гораздо большей степени, чем сходство тех или иных особенностей изложения, роднит «Флатландию» и «Сферландию» с произведениями таких мастеров этого жанра, как Кэррол, Гарднер и Штейнгауз, уже известными нашему читателю.

Вместе с тем нельзя не отметить, что во Флатландии, и даже в Сферландии, с точки зрения физики не все обстоит благополучно. На первый взгляд кажется, что обитатели двумерия действительно не могут ничего узнать о существовании третьего измерения. Уступая искусству авторов, читатели склонны согласиться и с тем, что четвертое измерение, возможно, существует, но просто недоступно нашему непосредственному восприятию.

Все это правильно лишь до тех пор, пока речь идет о геометрии и о механике. (Кстати, говоря об измерении расстояний при помощи света, автор «Сферландии» действует в приближении геометрической оптики: свет распространяется в виде «лучей», а не «волновых фронтов»!) Прямая «выглядит» одинаково и в двух, и в трех измерениях, и по траектории материальной точки нельзя определить размерность того пространства, в котором она движется. Но стоит лишь от механики частиц перейти к распространению волн, как все изменяется.

Если в двумерном мире распространяются колебания, то картина будет различной в зависимости от того, будут ли сами колебания истинно двумерными или двумерны лишь приборы и наблюдатель, регистрирующие трехмерные колебания. Колебания, происходящие в трехмерном пространстве, нельзя удержать на двумерной поверхности: они будут расходиться в трех измерениях, и двумерный наблюдатель обнаружит утечку энер-

гни. (Удерживать на плоскости можно лишь цилиндрическую волну, излучаемую перпендикулярно плоскости стержнем. Однако цилиндрическая волна, пройдя через какую-то точку, не исчезнет бесследно. Она оставит за собой «хвост» — колебания, приходящие от все более и более удаленных точек излучателя.) В теории дифференциальных уравнений доказывается, что волны в пространствах четной и нечетной размерностей ведут себя неодинаково. Различаются по своему поведению в пространствах четной и нечетной размерностей и волновые функции. Изучая квантовые свойства атома, можно убедиться в том, что наше пространство трехмерно.

Более того, даже в обычной механике «изгнать» трехмерность пространства далеко не просто. Например, используя при решении задачи принцип наименьшего действия, мы сравниваем действие вдоль всех возможных траекторий. При этом, разумеется, немаловажную роль играет выбор класса допустимых траекторий. Разрешив сравнивать траектории, выходящие за пределы трехмерного пространства, мы будем вынуждены приписать такому расширению нашего мира конкретные физические свойства, например высказать какие-то утверждения о скорости распространения света, характере полей и т. п. вдоль четвертого измерения, ибо в противном случае любая «волновая задача» утратит смысл. Следовательно, если бы наш трехмерный мир был вложен в четырехмерное пространство (подчеркнем, что речь идет не о четырехмерном пространстве — времени, а о четырех пространственных измерениях!), то физические свойства четвертого измерения мы могли бы изучить, оставаясь в своем трехмерном пространстве. Справедливость законов волновой механики и термодинамики убедительно свидетельствует о том, что наш мир истинно трехмерен. Аналогичным образом мог бы узнать о размерности того пространства, к которому он прикован по воле авторов «Флатландии» и «Сферландии», и обитатель двумерного мира.

Быть может, сын или внук Шестиугольника еще напишут о тех изменениях во взглядах на структуру пространства, которые произошли в Сферландии при жизни их поколения.

Более традиционному комбинаторному изложению первоначальных сведений из геометрии четырехмерного

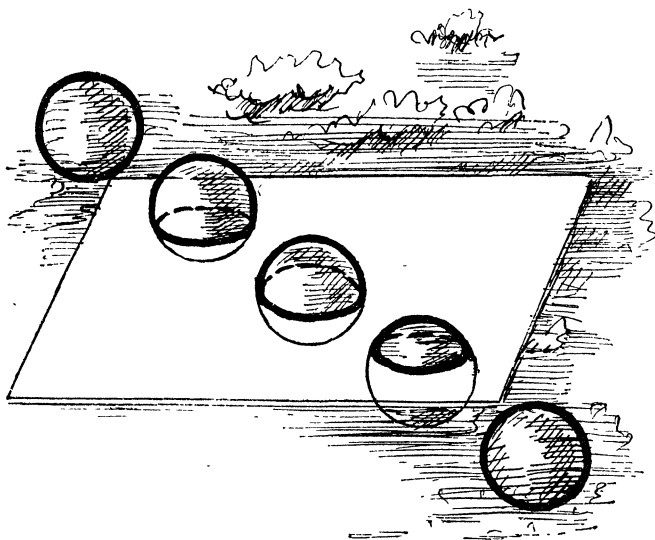
пространства посвящены очерки, составляющие дополнение к «Флатландии» и «Сферландии». Их авторы — участники и один из арбитров (профессор Генри Мэннинг) конкурса на лучшую популярную работу о четвертом измерении, проведенного в 1910 г. редакцией журнала *Scientific American*. В конкурсе приняли участие 245 авторов из разных стран мира: США, Турции, Австрии, Голландии, Индии, Австралии, Германии. Победителем стал американец Грэхэм Денби Фитч. По просьбе редакции *Scientific American* он написал (уже вне конкурса) также вторую статью «Неевклидова геометрия и четвертое измерение». Сборник работ, представленных на этот конкурс, впервые вышел в 1910 г. под названием «Простое объяснение четвертого измерения» и был переиздан в 1960 г.

Читателям предстоит проделать немалое путешествие по просторам Флатландии и Сферландии, и нам не хотелось бы задерживать их на самом пороге удивительных приключений. Поэтому мы закончим свое напутствие словами известного венгерского математика Ласло Фейеша Тота: необходимо «создавать бесконечное множество новых миров, законы которых можно постичь, хотя нога человека никогда не оставит на них следа».

Ю. Данилов
Я. Смородинский

Эдвин Э.Эбботт
ФЛАТЛАНДИЯ

Роман
о
четвертом измерении
с иллюстрациями автора,
Квадрата



Всем обитателям Трехмерного Пространства вообще
и Г. К. в частности
посвящает свой труд
скромный житель Флатландии
в надежде,
что, подобно тому как он смог постичь тайны
Трех Измерений,
хотя до того был знаком
лишь с Двумя,
обитатели небесной области
смогут воспарить еще выше
и постичь тайны Четырех, Пяти и даже Шести
Измерений,
тем самым способствуя
развитию воображения
и распространению
наиболее редкого и превосходного дара скромности
среди высших рас обитателей
Трехмерия

ПРЕДИСЛОВИЕ ИЗДАТЕЛЯ
КО ВТОРОМУ, ПЕРЕСМОТРЕННОМУ ИЗДАНИЮ

Если бы мой несчастный флатландский друг сохранил остроту ума, которой обладал, приступая к работе над своими мемуарами, мне не пришлось бы писать вместо него это предисловие. Мой друг просил меня, во-первых, поблагодарить читателей и критиков из Трехмерия, чья неожиданно высокая оценка привела ко второму изданию его труда, во-вторых, принести свои извинения за некоторые ошибки и опечатки (впрочем, ответственность за них лежит не только на нем) и, в-третьих, объяснить отдельные трудные места. Но ныне он не тот Квадрат, каким был прежде. Годы заключения и тяжкий груз всеобщего недоверия и насмешек вместе с естественным упадком сил, вызванным его преклонным возрастом, стерли из памяти многие идеи, понятия, терминологию, приобретенные им во время кратковременного пребывания в Трехмерии. Учитывая это, автор просил меня от его имени ответить на два возражения, одно из которых чисто умозрительного, а другое — морального характера.

Первое возражение вызвано тем, что флатландцы, глядя на Отрезок прямой, видят нечто, обладающее не только длиной, но и толщиной (ибо Отрезок не был бы виден, если бы не обладал некоторой толщиной). Следовательно, заключают критики, флатландец не может не признать, что его соотечественники обладают не только

длиной и шириной, но и некоторой, хотя и весьма малой, толщиной, или высотой. Это возражение на первый взгляд кажется настолько убедительным (а для жителя Трехмерия почти неопровержимым), что, впервые услышав его, я попросту лишился дара речи. Но, я думаю, ответ моего старого бедного друга полностью устраняет сомнения.

— Я не отрицаю,— заявил Квадрат по этому поводу,— достоверности тех фактов, на которые ссылается критик, но не могу согласиться со сделанным им выводом. Мы, обитатели Флатландии, действительно обладаем Третьим, не известным нам Измерением, называемым «высотой», так же, как вы, обитатели Трехмерия, обладаете Четвертым, не известным вам Измерением, не получившим пока еще особого названия. Я назову его гипервысотой. Но мы, флатландцы, способны воспринимать нашу «высоту» ничуть не в большей степени, чем вы, обитатели Трехмерия, свою «гипервысоту». Даже я, единственный флатландец, побывавший в Трехмерии и удостоенный привилегии в течение двадцати четырех часов воочию постигать сокровенный смысл понятия «высота», повторяю, даже я перестал теперь понимать, что это такое, и не могу более ни наглядно представить себе высоту, ни тем более доказать ее существование. Мне остается лишь одно: принять существование высоты на веру.

Причина моих затруднений очевидна. Каждое пространственное измерение подразумевает некое направление, означает возможность указывать размеры тел вдоль этого направления, возможность отличать большие тела от меньших. В то же время все Отрезки, наблюдаемые нами во Флатландии, имеют одинаковую исчезающе малую толщину (или, если угодно, высоту) и, следовательно, не содержат в себе ничего такого, что бы рождало в наших умах представление об этом Измерении. Никакой «сверхчувствительный микрометр» (им

предложил воспользоваться один излишне торопливый критик из Трехмерия) не принес бы нам ни малейшей пользы, ибо мы не знали бы ни того, что следует измерять, ни того, в каком направлении это надо делать. Когда мы видим Отрезок прямой, мы видим нечто длинное и светящееся. Светимость, так же как и длина, необходима для его существования. Отрезок, который перестает светиться, погибает. Именно поэтому все мои флатландские друзья, когда я заводил с ними разговор о не известном нам Измерении, каким-то образом проявляющемся в Отрезке, заявляли: «Вы, должно быть, имеете в виду яркость». Если я отвечал им, что имею в виду реальное Измерение, то они возражали: «Реальное Измерение? Тогда укажите нам размеры Отрезка вдоль этого измерения или сообщите, в каком направлении оно простирается». Это заставляло меня умолкнуть, поскольку я не мог сделать ни того, ни другого. Не далее как вчера, когда Верховная Окружность (иначе говоря, наш Высший Жрец), прибыв с инспекцией, совершаемой ею раз в году, в государственную тюрьму, нанесла мне седьмой визит и в седьмой раз спросила: «Так ли я высока, как прежде?», я попытался убедить ее в том, что она, сама того не ведая, обладает высотой, а не только длиной и шириной. И каков же был ее ответ? «Вы говорите, что я «высока». Измерьте мою высоту, и я поверю вам». Что мне оставалось делать? Как мне было ответить на вызов Верховной Окружности? Я был подавлен, а она, торжествуя, покинула мою камеру.

Вам кажется все это странным? Тогда представьте себя в аналогичном положении. Предположим, что Некто из Четырехмерного Пространства, удостоив вас своим посещением, обращается к вам со словами: «Когда бы вы ни открыли глаза, вы видите плоскую Фигуру (обладающую двумя Измерениями) и делаете заключение о том, что видите объемное Тело (обладающее тре-

Измерениями), но в действительности вы также видите (хотя и не сознаете этого) Четвертое Измерение. Под ним я понимаю не цвет и не яркость и не что-либо в том же роде, а истинное Измерение, хотя я не могу указать вам ни направление, в котором оно простирается, ни способ, позволяющий устанавливать размеры тел вдоль него».

Что бы вы сказали такому гостю? Разве не постарались бы упрятать его за семью замками? Именно такая участь и постигла меня: для нас, флатландцев, ничуть не менее естественно посадить под замок Квадрат, утверждающий, будто существует Третье Измерение, чем для вас, жителей Трехмерия, заключить в темницу Куб, распространяющийся о существовании Четвертого Измерения. Сколь сильно семейное сходство слепо подвергать гонениям все необычное прослеживается у представителей всех Размерностей! Точки, Отрезки прямых, Квадраты, Кубы, Гиперкубы — все мы склонны к одним и тем же ошибкам, все в равной мере являемся рабами предрассудков своей размерности. Как сказал один из ваших поэтов:

Одно прикосновение природы,
И в множестве миров
Мы прозреваем родственные узы¹.

В этом пункте защита Квадрата представляется мне безупречной. Столь же ясен и убедителен его ответ и на возражение морального характера. Некоторые читатели обвинили автора в женоненавистничестве. Поскольку на этом обвинении особенно рьяно настаивали те, кто по велению природы составляет большую часть населения Трехмерия, мне хотелось бы опровергнуть его

¹ Непонимание некоторыми критиками этого важного обстоятельства вынудило автора включить в свой диалог со Сферой (см. стр. 110—113) кое-какие замечания, проливающие свет на указанное родство между мирами различных размерностей. Ранее эти замечания были им опущены как излишние и утомительные. (Это примечание добавлено по просьбе автора.)

в той мере, в какой я могу это сделать, не погрешив против собственной совести. Однако Квадрат настолько непривычен к употреблению слов, означающих в Трехмерии те или иные понятия, связанные с моралью, что я оказал бы ему дурную услугу, если бы попытался буквально воспроизвести аргументы, выдвинутые им в ответ на это обвинение. Поэтому, взяв на себя смелость выступить в двух ролях — переводчика и комментатора, я выяснил, что за время семилетнего заключения Квадрат изменил не только свои взгляды на женщин, но и отношение к Равнобедренным Треугольникам (то есть низшим слоям Флатландии). Ныне вместе со Сферой он склонен считать (см. стр. 103), что Отрезки прямых во многих важных отношениях превосходят Окружности. Однако в своих мемуарах Квадрат стремился (быть может, излишне старательно) изложить взгляды и мнения, разделяемые подавляющим большинством как флатландских историков, так и (по уверениям самого автора) историков Трехмерия. И действительно, на страницах исторических трактатов (вплоть до недавнего времени) судьбы женщин и огромных народных масс не только никогда подробно не рассматривались, но и почти не упоминались.

В несколько более туманных выражениях Квадрат выразил желание отвести от себя подозрения в пристрастии к Круговому, или аристократическому, обществу, усмотренном в его труде некоторыми критиками. Воздавая должное силе ума Окружностей, которая позволяет столь немногочисленной группе на протяжении многих поколений поддерживать свое превосходство над несметными толпами соотечественников, Квадрат отметил, что факты из жизни Флатландии говорят сами за себя и не требуют комментариев. Он заявил, что восстания не всегда удается подавлять мечом и что природа, обрекая Окружности на бесплодие, тем самым приговорила их в конечном счете к полному исчезновению. «В

этом,— добавил Квадрат,— я усматриваю проявление великого закона всех миров, состоящего в том, что, пока их обитателю кажется, будто он направляет свою мысль на одно, мудрость природы направляет его мысль на другое, причем это другое в корне отлично от первого и гораздо лучше его».

Наконец, Квадрат просил читателей не думать, будто любая мелочь в повседневной жизни Флатландии непременно должна иметь свой аналог в Трехмерии. Тем не менее он надеется, что в целом его работа может оказаться не только поучительной, но и занимательной тем жителям Трехмерия, чей скромный и умеренный разум не позволяет говорить о том, что чрезвычайно важно, но лежит за пределами опыта, с одной стороны: «Такого никогда не бывает!», а с другой: «Так и должно быть. Мы знали это заранее».

ЧАСТЬ I

ЭТОТ МИР

*Будь терпелив, ибо мир широк
и ему нет ни конца, ни края.*

1. О ПРИРОДЕ ФЛАТЛАНДИИ

Я называю наш мир Флатландией не потому, что мы сами называем его так, а лишь из желания сделать его природу более понятной для вас, мои счастливые читатели, которым выпала честь жить в Пространстве.

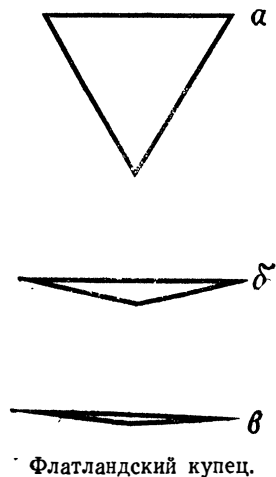
Представьте себе огромный лист бумаги, на котором Отрезки прямых, Треугольники, Квадраты, Пятиугольники, Шестиугольники и другие фигуры, вместо того чтобы неподвижно оставаться на своих местах, свободно перемещаются по всем направлениям вдоль поверхности, не будучи, однако, в силах ни приподняться над ней, ни опуститься под нее, подобно теням (только твердым и со светящимися краями), и вы получите весьма точное представление о моей стране и моих соотечественниках. Увы, несколько лет назад я бы сказал о «моей Вселенной», но теперь моему разуму открылись более высокие представления о вещах.

Как вы, должно быть, сразу же поняли, в нашем мире не может существовать ничего такого, что вы призывали называть «объемным». Смее думать, что вы предполагаете, будто мы можем по крайней мере отличать по виду Треугольники, Квадраты и другие фигуры, которые передвигаются описанным выше способом. Вы глубоко заблуждаетесь: нам не дано непосредственно ощущать различие между фигурами, по крайней мере различать их по виду. Мы не видим, да и не могли бы видеть ничего, кроме Отрезков прямых. Чем это вызвано, я постараюсь сейчас объяснить.

Положите на какой-нибудь стол в своем Пространстве монету достоинством в один пенни и, наклонившись

над столом, посмотрите на него сверху. Монета покажется вам кругом.

Приняв затем вертикальное положение, начните медленно приседать таким образом, чтобы луч вашего зрения постепенно приближался к поверхности стола (а вы сами все более и более приближались бы к состоянию обитателей Флатландии). Вы увидите, что монета перестанет казаться вам кругом и примет овальную форму. Когда же, наконец, луч вашего зрения совместится



с поверхностью стола (а вы как бы станете флатландцем), то монета вообще перестанет быть овалом и покажется вам, как вы сможете убедиться, отрезком прямой.

То же произойдет и в случае, если вместо монеты вы возьмете Треугольник, Квадрат или любую другую фигуру, вырезанную из картона. Стоит вашему лучу зрения совместиться с поверхностью стола, как любая фигура утратит свой вид и покажется вам отрезком прямой. Возьмем, например, равносторонний Треугольник, во Флатландии такие треугольники являются представителями уважаемого класса — купечества. Каким вы увидите купца, если посмотрите на него сверху, показано на рисунке *a*, каким он предстанет перед вами, если луч вашего зрения будет все более приближаться к поверхности стола, не совпадая с нею полностью, видно из ри-

сунков *б* и *в*. Если же луч вашего зрения сольется с поверхностью стола (именно так мы и смотрим на купца во Флатландии), то вы не увидите ничего, кроме прямолинейного отрезка.

В бытность свою в Трехмерии мне довелось слышать о том, что и ваши моряки испытывают нечто подобное, когда, странствуя по морям, открывают остров или землю, лежащие у самого горизонта. Еле видимый берег может быть изрезан бухтами, мысами, может иметь сколько угодно выступов и впадин любой протяженности, тем не менее с большого расстояния вы не увидите ничего (если только ваше солнце своими яркими лучами не отбросит тени, делающие заметными каждый бугорок и любую впадину), кроме сплошной серой линии на поверхности воды.

Именно такую картину мы наблюдаем во Флатландии, когда к нам приближается Треугольник или какой-нибудь другой знакомый. Поскольку у нас нет ни солнца, ни какого-либо другого источника света, который отбрасывал бы тени, ничто не может помочь нам различить знакомых по виду так, как вы различаете их в своем Трехмерии. Если наш друг приближается к нам, отрезок увеличивается прямо-таки на глазах. Если он удаляется от нас, отрезок уменьшается. Но наш знакомый всегда выглядит для нас отрезком прямой. Независимо от того, имеет ли он форму Треугольника, Квадрата, Пятиугольника, Шестиугольника, Окружности, мы всегда увидим Отрезок прямой и ничего больше.

Возможно, вы захотите узнать, каким образом при столь неблагоприятных обстоятельствах мы умудряемся отличать наших знакомых друг от друга. Ответить на этот весьма естественный вопрос мне будет легче и уместнее, когда я перейду к описанию обитателей Флатландии. Пока же я на время оставляю эту тему и скажу несколько слов о климате и жилищах в нашей стране.

2. О ФЛАТЛАНДСКОМ КЛИМАТЕ И ЖИЛИЩАХ

У нас, так же как и у вас, имеются четыре стороны света: север, юг, восток и запад.

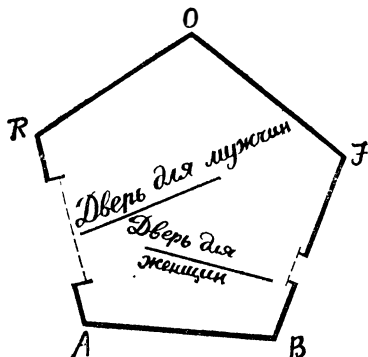
Поскольку в нашем мире нет ни солнца, ни других небесных тел, определять направление на север обычным

способом мы не можем, но у нас есть для этого свой собственный метод. По закону природы, действующему во Флатландии, существует постоянное притяжение к югу. А поскольку климат нашей страны разнится весьма незначительно (колебания температуры настолько малы, что даже не отличающиеся особым здоровьем женщины без труда могут совершать путешествия на несколько ферлонгов в северном направлении), то именно сопротивление, оказываемое притяжением к югу, служит компасом в большей ее части. Кроме того, определять направление помогают выпадающие через правильные промежутки времени дожди, которые всегда идут с севера. В городах направление нам указывают стены домов, вытянутые в большинстве случаев с юга на север для того, чтобы дождь, идущий с севера, легко скатывался с крыш. В сельской местности, там, где нет домов, компасом служат стволы деревьев. Таким образом, определить стороны света во Флатландии не так трудно, как может показаться на первый взгляд.

Тем не менее, находясь в северных районах Флатландии — в местности совершенно безлюдной, где нет ни домов, ни деревьев, а притяжение к югу едва ощутимо, — я иногда, прежде чем продолжать свой путь, вынужден был подолгу оставаться на месте в ожидании дождя. Больные и престарелые обитатели Флатландии (особенно женщины хрупкого сложения) ощущают притяжение к югу сильнее, чем здоровые представители сильного пола. Правила вежливости требуют, чтобы при встрече с женщиной на улице вы уступали ей северную сторону. Если вы не вполне здоровы и находитесь в местности, где отличить север от юга довольно трудно, выполнить это правило не так-то просто.

В домах флатландцев нет окон. Свет проникает в наши дома и выходит из них днем и ночью, одинаково в любое время суток и в любом месте. Откуда он берется, неизвестно. С давних времен наших ученых весьма занимал вопрос о происхождении света. Но неоднократные попытки найти ответ на него, к сожалению, приводили лишь к одному плачевному результату: увеличивали число пациентов в приютах для умалишенных. После тщетных усилий воспрепятствовать исследованиям происхождения света (такие исследования первоначально облагались высоким налогом) сравнительно недавно

был принят закон о строжайшем запрете всех подобных изысканий. Лишь мне, единственному обитателю Флатландии, известно сейчас истинное решение этой загадочной проблемы, но я не могу поделиться им ни с одним из своих соотечественников. Меня осыпают насмешками. Я, единственный, который постиг истину о Пространстве и проникновении света из трехмерного мира, объявлен безумнейшим из безумных! Но довольно горьких размышлений. Вернемся к жилищам флатландцев.



Флатландский дом.

Дома наши чаще всего имеют форму пятиугольника. Две северные стороны RO , OF образуют крышу, и в них, как правило, не прорезают дверей. В восточной стороне имеется небольшая дверка для женщин, а в западной прорезана дверь гораздо больших размеров — для мужчин. В южной стене (или в полу) дверей обычно не делают.

Строить квадратные или треугольные дома флатландцам не разрешается, и вот почему. Поскольку углы Квадрата (а тем более равностороннего Треугольника) гораздо острее, чем углы Пятиугольника, а края неодушевленных предметов (каковыми являются дома) испускают более тусклое свечение, чем края мужчин и женщин, острые вершины квадратных или треугольных домов представляли бы немалую опасность для неосмотрительных или рассеянных путников, которые могли бы внезапно наткнуться на них. Поэтому еще в один-

надцатом веке нашей эры треугольные дома были повсюду запрещены законом. Исключение составляли лишь крепости, пороховые погреба, казармы и другие государственные сооружения, посещение которых без особого разрешения властей было нежелательным.

В то время повсеместно разрешалось еще строительство квадратных домов, хотя и тогда уже они облагались высоким налогом. Три столетия спустя закон установил, что в городах с населением свыше десяти тысяч жителей наименьшим допустимым с точки зрения безопасности углом дома является внутренний угол правильного пятиугольника. Чувство добрососедства и сознание общности интересов вторило усилиям закона, и теперь даже в сельской местности вы повсюду встретите лишь дома пятиугольной конструкции. Ныне любитель древностей может обнаружить квадратный дом только в самых глухих и удаленных районах Флатландии.

3. О ЖИТЕЛЯХ ФЛАТЛАНДИИ

Наибольшую длину или ширину взрослого обитателя Флатландии можно оценить примерно в одиннадцать ваших дюймов. Максимальными размерами считаются двенадцать дюймов.

Наши женщины имеют вид Отрезков прямых.

Наши солдаты и представители низших слоев населения имеют форму Треугольников с двумя равными сторонами, каждая из которых имеет в длину около одиннадцати дюймов, и основанием, или третьей стороной, столь короткой (длина основания нередко не превышает половины дюйма), что углы при вершине этих Треугольников необычайно остры и имеют устрашающий вид. В случае вырождения (когда длина основания не превышает одной восьмой дюйма) такие Треугольники чрезвычайно трудно отличить от Отрезков прямых, или женщин: столь остры углы при их вершинах. Треугольники с двумя равными сторонами у нас, так же как и у вас, в отличие от всех прочих Треугольников принято называть Равнобедренными. Именно так мы и будем называть их в дальнейшем.

Средние слои общества во Флатландии образуют Равносторонние Треугольники,

Лица, владеющие какой-либо профессией, и джентльмены имеют форму Квадратов (к этому классу имею честь принадлежать и я сам) и Пятиугольников.

Затем идут благородные сословия. У них есть своя иерархия. Низшую ступень занимают Шестиугольники. По мере продвижения вверх число сторон у фигуры возрастает до тех пор, пока ее не удостоивают почетного звания Правильного Многоугольника. Наконец, когда число сторон многоугольника становится столь велико, а их длина столь мала, что фигуру нельзя отличить от окружности, ее включают в Круговой орден, иными словами, причисляют к жрецам.

По действующему во Флатландии закону природы у сына может быть на одну сторону больше, чем у отца, поэтому каждое поколение, как правило, поднимается на одну ступень как в своем развитии, так и по иерархической лестнице. Например, сыном Квадрата может быть Пятиугольник, сыном Пятиугольника — Шестиугольник и так далее.

Но это правило почти не распространяется на купцов и еще в меньшей степени применимо к солдатам и низшим слоям населения, которые, строго говоря, не заслуживают названия Правильных Фигур, поскольку не все их стороны равны. В низших слоях общества закон природы иной: сын Равнобедренного Треугольника (то есть Треугольника с двумя равными сторонами) остается по-прежнему Равнобедренным. Но все же иногда может случиться и так, что потомство Равнобедренного Треугольника изменит свое жалкое состояние и поднимется на более высокую ступень общественной лестницы. Например, после серии блестящих побед, одержанных на поле брани, или по окончании многотрудной и искусной работы у наиболее выдающихся представителей класса ремесленников и солдат наблюдается небольшое увеличение основания и сокращение двух боковых сторон. Организуемые жрецами смешанные браки между сыновьями и дочерьми наиболее выдающихся представителей низших сословий обычно приводят к тому, что дети в таких семьях все более и более приближаются по своему типу к Равносторонним Треугольникам.

В редких (по сравнению с высоким уровнем рождаемости Равнобедренных Треугольников) случаях истинный Равносторонний Треугольник может родиться

и у Равнобедренных родителей, что подтверждается специальным удостоверением¹. Как правило, таким случаям предшествует не только длинная серия тщательно продуманных браков, но и продолжительное самоограничение и умеренность со стороны предков будущего Равностороннего Треугольника, а также терпеливое систематическое и непрерывное развитие их умственных способностей на протяжении многих поколений.

Рождение истинного Равностороннего Треугольника у Равнобедренных родителей служит предметом всеобщего ликования, и весть о нем разносится на много ферлонгов вокруг. После строгой проверки, проводимой Санитарной и социальной комиссией, ребенок получает удостоверение Правильного Треугольника и его торжественно зачисляют в класс Равносторонних Треугольников. Затем новорожденного немедленно забирают у гордых, но опечаленных предстоящей разлукой родителей, после чего его усыновляет какая-нибудь бездетная чета Равносторонних Треугольников, с которых берется торжественная клятва не разрешать ребенку переступать порог родительского дома и видаться с прежними родителями из опасения, что его неокрепший организм под влиянием неосознанного стремления к подражанию может вернуться к уровню, уготованному ему наследственностью.

Спорадическое появление Равносторонних Треугольников, происходящих от рожденных в рабстве предков, приветствуют во Флатландии не только сами несчастные рабы (для них возможность такого события — единственная надежда, озаряющая унылую нищету существования), но и вся аристократия в целом. Высшие слои Флатландии хорошо сознают, что подобные явления в силу их редкости мало затрагивают, если затрагивают

¹ «Для чего вообще необходимо какое-то удостоверение? — может спросить критик, живущий в Трехмерии. — Разве рождение Квадратного сына само по себе не является удостоверением, выдаваемым самой природой и доказывающим равносторонность его отца?»

На это я отвечаю, что ни одна дама из общества не выйдет замуж за Треугольник, не имеющий официального удостоверения о правильности. Квадраты иногда рождаются и у слегка Неправильных Треугольников, но почти во всех таких случаях неправильность первого поколения повторно возникает в третьем поколении, вследствие чего внукам либо не удастся достичь ранга Пятиугольников, либо они вообще вырождаются в Треугольники.

вообще, дарованные им привилегии и в то же время служат мощным заслоном на пути любой попытки государственного переворота.

Если бы вся остроугольная чернь без единого исключения была лишена надежды и способа удовлетворить свое тщеславие, то из многочисленных смутьянов могли бы появиться вожаки и толпа, пользуясь превосходством в численности и силе, могла бы выйти из повиновения Окружностей. Но мудрая предусмотрительность природы распорядилась так, что по мере развития интеллекта, роста знаний и прочих добродетелей у низших сословий в той же пропорции увеличивается и острый угол при их вершине (делающий их столь грозными), постепенно приближаясь к безвредному углу Равностороннего Треугольника. Так, наблюдения над представителями самого жестокого и воинственного слоя солдат, мало чем отличающихся по уровню своего развития от женщин с их полным отсутствием интеллекта, показали, что, как только умственные способности солдат достигают уровня, позволяющего им использовать свою проникающую способность для собственной выгоды, сама проникающая способность падает.

Сколь восхитителен такой закон компенсации! И сколь совершенное доказательство естественности и, я бы сказал, божественного происхождения аристократической формы правления Флатландии он дает! Мудро используя этот закон природы, Многоугольники и Окружности всегда могут подавить любую смуту в самой колыбели и опереться на неисчерпаемую и неограниченную способность человеческого ума надеяться на лучшее. Искусство врачей также приходит на помощь закону и порядку. Растянув или сжав одну из сторон (такую операцию с легкостью производят врачи, состоящие во Флатландии на государственной службе), всегда можно перевести наиболее разумных вожаков восстания в разряд Правильных фигур, тем самым причислив их к привилегированным классам. Гораздо большее число фигур, питающих надежду на то, что и им удастся попасть в благородное сословие, поступает на лечение в государственные госпитали, где и находятся в почетном заключении до конца своих дней. Одну или двух из наиболее упорных, глупых и безнадежно неправильных фигур приходится казнить.

Несчастливая толпа Равнобедренных Треугольников, лишенная цели и руководства, либо подвергается избиению со стороны небольшой кучки своих же собратьев, состоящих на содержании (для подобных случаев) у Главной Окружности, либо, что гораздо чаще, Круговой партии удается посеять в рядах восставших зависть и подозрение, вовлечь их в братоубийственную войну, в ходе которой они и гибнут, пронзив друг друга своими смертоносными углами при вершинах. В анналах истории сохранилась память о ста двадцати восстаниях, происшедших во Флатландии, а число более мелких смут доходит до двухсот тридцати пяти; все они заканчивались так, как описано выше.

4. О ЖЕНЩИНАХ ФЛАТЛАНДИИ

Если наши Равнобедренные Треугольники из класса солдат с их острыми углами при вершине способны внушать страх, то нетрудно догадаться, какой ужас внушают во Флатландии женщины. Действительно, если о солдате можно сказать, что он подобен острому клинку, то женщину следует сравнить только с иглой. Женщины Флатландии, если можно так выразиться, образуют сплошную вершину, по крайней мере на обоих концах своего тела. Если добавить к этому их способность в любой момент по собственному желанию становиться невидимыми, то вы поймете, что шутить с женщинами во Флатландии не безопасно.

Возможно, некоторые из моих более юных читателей захотят узнать, каким образом женщины Флатландии становятся невидимыми. Мне кажется, что это должно быть понятно без всяких объяснений, однако несколько слов для тех, кто не желает утруждать себя размышлениями, я все же скажу.

Положите на стол иглу. Затем, наклонившись так, чтобы ваши глаза оказались на уровне поверхности стола, взгляните на нее сбоку. Вы увидите иглу по всей ее длине. Но посмотрите на иглу со стороны острия или с тупого конца, и вы не увидите ничего, кроме точки: игла практически станет невидимой. Именно так и поступают наши женщины. Если флатландская женщина повернулась к вам боком, то вы видите прямолинейный отрезок. Если к вам обращен тот конец ее тела,

в котором находится глаз или рот (мы не делаем различия между этими органами), то вы видите лишь яркую светящуюся точку. Если же к вам обращен задний конец ее тела, то вы видите точку, очень слабо светящуюся, почти темную, словно неодушевленный предмет. Таким образом, «спина» служит женщине как бы своего рода шапкой-невидимкой.

Рискуя создать у читателей, живущих в Трехмерии, самое невыгодное представление о флатландцах, я сейчас расскажу о том, каким опасностям подвергают нас женщины. Если столкновение с вершиной при угле respectableного Равностороннего Треугольника из средних слоев флатландского общества таит в себе опасность, столкновение с представителем низших слоев наносит нам ощутимый ущерб, столкновение с офицером приводит к тяжкому ранению, если одно лишь прикосновение к вершине рядового солдата грозит смертью, то чего можно ожидать от встречи с женщиной, как не полного и немедленного уничтожения? А поскольку женщины невидимы или видимы лишь как темные или слабо светящиеся точки, то можно себе представить, как трудно избежать столкновения с ними даже наиболее осторожным из нас!

В различные времена и в различных государствах Флатландии были приняты законодательные акты, направленные на уменьшение этого зла. На юге и в менее умеренных климатических зонах, где сила притяжения сказывается сильнее, а люди более подвержены внезапным и произвольным порывам, законы о женщинах естественно отличаются большей строгостью. Но если мы рассмотрим все кодексы, то в среднем их ограничения сводятся к следующему.

1. В каждом доме с восточной стороны должна быть специальная дверь, пользоваться которой разрешается только женщинам. Все женщины, входящие в дом через эту, а не через мужскую дверь, расположенную в западной стене дома, встречают «радушный прием»¹.

¹ Находясь в Трехмерии, я узнал, что некоторые представители ваших церковных кругов также ввели в обиход отдельные входы для деревенских жителей, фермеров и учителей воскресных школ (см. журнал *Spectator*, сентябрь 1884, стр. 1255), дабы те, входя каждый в свою дверь, встречали «радушный и подобающий их положению прием».

2. Женщина, находящаяся в общественном месте, обязана под страхом смерти все время издавать предупредительные крики.

3. Любая женщина, страдающая пляской святого Вита, припадками, хроническим насморком, сопровождающимся сильными приступами чихания, или любой другой болезнью, проявляющейся в произвольных движениях (заболевание должно быть официально установлено), подлежит немедленному уничтожению.

В некоторых государствах Флатландии принят дополнительный закон, запрещающий женщинам под страхом смерти проходить или стоять в общественном месте, не совершая при этом непрерывных колебательных движений справа налево, дабы те, кто окажется за их спинами, могли обнаружить присутствие представительниц слабого пола. В других государствах женщина, отправляясь в путь, должна иметь при себе сопровождающего: это может быть кто-то из сыновей, слуга или муж. В третьих государствах женщинам вообще запрещают покидать стены их домов, им дозволено появляться на улицах лишь по большим религиозным праздникам. Однако наиболее мудрые из наших Окружностей, или государственных мужей, считают, что ограничения, налагаемые на женщин законами, приводят не только к ослаблению и вырождению расы, но и к резкому росту числа убийств на семейной основе, вследствие чего государство теряет от чрезмерно строгого законодательства больше, нежели приобретает.

И в самом деле, женщины, выведенные из себя необходимостью постоянно пребывать в стенах собственного дома или строгими ограничениями на свободы вне его, склонны обращать свою ярость на мужей и детей. В более жарких странах бывают случаи, когда все мужское население в течение одного-двух часов становится жертвой такой вспышки. Поэтому в государствах с хорошо отлаженной машиной управления трех упомянутых выше законов оказывается вполне достаточно, так что их можно рассматривать как грубое приближение к нашему женскому кодексу.

Однако наиболее надежной защитой флатландцев является не закон, а собственные интересы женщин. Действительно, флатландская женщина, попятысь, может вызвать мгновенную смерть того, кто окажется по-

зади нее, но она должна тотчас вытащить свой жалящий конец из сопротивляющейся жертвы, в противном случае конвульсии последней полностью разрушат ее хрупкое тело.

Помогает нам и мода. Я уже упоминал о том, что в некоторых менее цивилизованных государствах женщинам не разрешается находиться в общественных местах, не совершая при этом колебаний задним острием справа налево. С незапамятных времен этот обычай распространился среди дам, претендующих на сколько-нибудь хорошее воспитание, во всех цивилизованных государствах. Там считается недопустимым вмешиваться в вопросы, связанные с тем, что должно быть и является природным инстинктом любой уважающей себя дамы. Ритмические и, если можно так выразиться, хорошо модулированные колебания заднего острия у дам нашего высшего общества (принадлежащих к Круговому рангу) служат предметом зависти и подражания для жен обычных Равносторонних Треугольников, которые способны лишь на монотонные колебания, подобные колебаниям часового маятника. В свою очередь правильное «тиканье» жен Равносторонних Треугольников в не меньшей мере восхищает и служит предметом подражания для жен наиболее прогрессивных и мыслящих Равнобедренных Треугольников, в семьях которых движение жалящего конца еще не стало жизненной необходимостью. Таким образом, в любой флатландской семье независимо от того, какое положение она занимает в обществе, «заднее движение» распространено столь же широко, как и пользование часами. Мужья и сыновья во флатландских семьях радуются тому, что избавлены по крайней мере от атак невидимого врага.

Не следует думать, будто наши женщины лишены увлечений. Но, к сожалению, увлечение, охватившее особу слабого пола в данный момент, всегда оказывается сильнее любых разумных соображений. Причину этого, разумеется, следует искать в неудачной конфигурации женского тела. Ибо женщины, не имея надежд получить собственный внутренний угол (в этом отношении они уступают даже последнему из Равнобедренных Треугольников), полностью лишены способности рассуждать, не обладают ни ясностью мышления, ни здравостью

суждений, ни способностью обдумать заранее свои поступки, ни даже, наверное, памятью. В приступах ярости женщины не помнят своих прежних обещаний и не признают никаких различий. Мне известен случай, когда женщина совершенно разрушила свое жилище и уничтожила всех своих домашних, а спустя полчаса, когда приступ ярости утих и обломки были убраны, спросила, что случилось с ее мужем и детьми!

Ясно, что женщину, которая способна повернуться кругом, не следует раздражать. Если вы разговариваете с флатландской женщиной в ее собственных апартаментах (а они специально построены так, чтобы женщина не могла повернуться кругом), то можете говорить и делать что угодно. В стенах своей комнаты флатландская женщина полностью лишена способности наносить смертельные раны врагу. Если даже у вас возникнет конфликт, то не пройдет и нескольких минут, как женщина полностью забудет и то, почему она только что угрожала вам смертью, и те обещания, которыми вы уняли приступ ее ярости.

В целом наша семейная жизнь протекает довольно гладко, исключения составляют лишь низшие слои военных. В этой части флатландского общества отсутствие такта и разумных действий со стороны мужей приводит иногда к неопишуемым разрушениям. Полагаясь в большей мере на наступательную силу своих острых углов, нежели на здравый смысл и смягчающие уговоры, эти беспечные создания слишком часто пренебрегают установленной свыше конструкцией женских апартаментов или раздражают своих жен плохо продуманными выражениями, которые произносятся, стоя в дверях, и отказываются немедленно взять свои слова обратно. Кроме того, тупое и неколебимое столкновение буквальных истин делает их неспособными к тем тонким обещаниям, с помощью которых разумная Окружность может в один момент утихомирить свою разбушевавшуюся супругу. В результате столь неразумной политики в домах военных подчас вспыхивают побоища, хотя и в этом можно усмотреть известное преимущество: в жарких баталиях погибают наиболее жестокие и беспокойные Равнобедренные Треугольники. Многие из наших Окружностей усматривают в разрушительных способностях прекрасного пола одно из многих мудрых проявлений провиде-

ния, помогающих избавляться от перенаселения и подавлять в зародыше возможность любого бунта.

И все же даже в наших лучших, почти круговых семьях идеал семейной жизни далек от идеала семейной жизни у вас, в Трехмерии. Мир в домашних стенах достигим и у нас (если только отсутствие бойни заслуживает такого названия), но гармонии вкусов и цели, как правило, не наблюдается. Осторожная мудрость Окружностей обеспечила безопасность семейной жизни флатландцев ценой домашнего удобства. Во всех круговых или многоугольных семьях с незапамятных времен стало обычаем (у женщин высших классов нашего общества это превратилось в своего рода инстинкт), что рты и глаза матерей и дочерей постоянно направлены к мужьям и друзьям мужского пола. Для дамы из сколько-нибудь влиятельной семьи повернуться спиной к мужу означает потерю престижа. Но, как я вскоре покажу, этот обычай, хотя он имеет свои преимущества в смысле безопасности, не лишен некоторых недостатков.

В доме рабочего или почтенного коммерсанта, где жена, занимаясь своими домашними обязанностями, поворачивается спиной к мужу, существуют по крайней мере интервалы относительного спокойствия, когда жен не слышно, не видно (если не считать постоянно звучащего предупредительного возгласа). В домах же высших классов покоя не бывает. Огромные рты и яркие пронзительные глаза все время направлены на хозяина дома, и погасить этот свет не легче, чем прервать поток женского красноречия. Искусство и такт, достаточные для того, чтобы избежать укола жалящей части женского тела, отнюдь не достаточны для того, чтобы справиться с более трудной задачей — закрыть рот женщины. А поскольку жене флатландца говорить не о чем и никакие ухищрения разума, здравого смысла или сознания не способны помешать ее болтовне, многие циники утверждали, что они предпочитают мгновенную смерть от неслышного укола медленной гибели от звуков, издаваемых ртом женщины.

Моим читателям, живущим в Трехмерии, условия жизни наших женщин могут показаться чрезвычайно тягостными, таковыми они и являются в действительности. Мужчина, принадлежащий к самому низшему типу

Равнобедренных Треугольников, может надеяться на некоторое увеличение своего угла при вершине и на переход из низкой касты в более высокий класс, но женщина не может тешить себя подобными иллюзиями. «Кто хоть раз родился женщиной, навсегда останется женщиной»,— таков закон природы. Любой закон эволюции обходит своей милостью женщин. Мы можем по крайней мере восхищаться мудрым провидением, которое устроило так, что у женщин нет надежд, ибо у них нет памяти и нет способности предвкушать будущее, несчастья и унижение, служащие необходимыми условиями их существования и составляющие основу жизни всего общества Флатландии.

5. КАК ФЛАТЛАНДЦЫ УЗНАЮТ ДРУГ ДРУГА

Вам, счастливым обладателям света и тени, наделенным двумя глазами, располагающим знаниями перспективы и наслаждающимся различными цветами, вам, способным действительно видеть угол и созерцать Окружность в счастливой области Трех Измерений, как объяснить мне вам те крайние трудности, какие встают перед нами во Флатландии при попытке опознать друг друга?

Напомню вам кое-что из уже сказанного. Все существа во Флатландии, одушевленные или неодушевленные, независимо от их формы представляются нашему зрению одинаковыми или почти одинаковыми, а именно в виде Отрезков Прямых. Так каким образом можно отличить один предмет от другого, если все они выглядят одинаково?

На этот вопрос можно дать три ответа. Первый способ — распознавание *на слух*. Слух у флатландцев развит гораздо сильнее, чем у вас, живущих в Пространстве, и позволяет нам не только отличать наших друзей по голосам, но даже узнавать представителей различных классов, по крайней мере представителей трех низших ступеней: Равносторонних Треугольников, Квадратов и Пятиугольников (не считая Равнобедренных Треугольников). Однако по мере подъема по общественной лестнице распознавать представителей отдельных классов по голосам становится все более затруднительным. От

части это объясняется тем, что различие между голосами стирается, отчасти тем, что этот способ распространен в основном среди плебеев и не пользуется особым успехом у аристократии. Коль скоро возникает хотя бы малейшее подозрение в жульничестве, доверять собственному слуху мы не можем. У представителей низших слоев населения Флатландии органы речи развиты в такой же степени, как и органы слуха, поэтому Равнобедренные Треугольники с легкостью различают голоса Многоугольников, а после соответствующей тренировки даже голос самих Окружностей.

Гораздо большее распространение получил второй метод распознавания. Он состоит в *ощупывании* и распространен среди женщин, представителей низших классов (о представителях высших классов я скажу чуть позднее), во всех случаях, когда встречаются два незнакомца и требуется установить не личность данного индивидуума, а его положение на общественной лестнице. Таким образом, *ощупывание* во Флатландии играет ту же роль, что и представление в Трехмерии. «Позвольте мне просить вас ощупать моего друга мистера Такого-то и быть ощупанным им»,— такова обычная форма флатландского представления, которую до сих пор еще можно услышать из уст более старомодных джентльменов, живущих в сельской местности в удаленных от больших городов районах Флатландии. В городах же среди деловых людей слова «быть ощупанным» часто опускаются и вся фраза сокращается до следующей: «Разрешите мне просить вас ощупать мистера Такого-то» (хотя, естественно, предполагается, что *ощупывание* должно быть взаимным). Среди более современных и модных молодых людей, крайне небрежно и безразлично относящихся к чистоте родного языка, форма представления сократилась еще больше и термин «ощупывать» имеет чисто технический смысл, означая «рекомендовать для *ощупывания* и того, чтобы быть *ощупанным* самому». В настоящее время подобный сленг распространен в высших слоях общества и породил такие варваризмы, как «Мистер Смит, позвольте мне *ощупать* вас мистеру Джонсу».

Не следует, однако, думать, дорогой читатель, будто процедура *ощупывания* у нас во Флатландии более утомительна, чем у вас, в Трехмерии, или что нам необходимо

ощупывать все стороны каждого индивидуума, положение которого на общественной лестнице нам требуется определить. Продолжительная практика и тренировка, начинающаяся в школе и продолжающаяся в повседневной жизни, развила у нас способность с одного прикосновения различать углы Равносторонних Треугольников, Квадратов и Пятиугольников, не говоря уже о безмозглых вершинах остроугольных Равнобедренных Треугольников, прикосновение к которым сразу же выясняет их печальное положение. Поэтому нам, как правило, достаточно ощупать лишь один-единственный угол любого индивидуума, после чего мы сразу узнаем, к какому классу принадлежит та персона, к которой мы в данный момент обращаемся (разумеется, если наш собеседник не принадлежит к высшим слоям общества). В последнем случае трудностей больше. Даже бакалавр искусств из нашего университета в Вентбридже однажды спутал Десятиугольник с Двенадцатиугольником. В том же знаменитом университете вряд ли найдется доктор наук, который сумеет должным образом и без колебаний отличить Двадцатиугольник от Двадцатичетырехугольника.

Читатели, которые помнят отрывки из кодекса законов о женщинах, с легкостью поймут, какой осторожности и осмотрительности требует процедура представления во Флатландии. Малейшая небрежность может стоить ощупывающему жизни. Для безопасности его необходимо, чтобы тот, кого ощупывают, стоял совершенно неподвижно. Резкое движение, суетливая перемена в положении тела и даже внезапный приступ чихания может оказаться роковым для неосторожного и в корне разрушить зарождающуюся дружбу. Особой осторожности требует общение с представителями низших классов Треугольников. Глаз у них расположен на таком удалении от вершины, что они с трудом сознают даже то, что происходит на другом конце их собственного тела. Кроме того, они по самой своей природе отличаются большей грубостью и не чувствительны к деликатным прикосновениям высокоорганизованных правильных Многоугольников. Стоит ли удивляться, если произвольный поворот головы такого низкоразвитого индивидуума может лишить государство одной из наиболее ценных для него жизней!

Мой замечательный дедушка, один из наименее неправильных Равнобедренных Треугольников, незадолго до своей болезни получивший четыре из семи голосов в Санитарной и Социальной Комиссии, что позволило ему перейти в класс Равносторонних Треугольников, часто рассказывал мне со слезой в своем единственном глазу о несчастье такого рода, происшедшем с его прапрапрадедушкой, весьма уважаемым рабочим с углом при вершине в пятьдесят девять градусов тридцать минут. Мой несчастный предок, будучи подвержен приступам ревматизма, однажды в тот момент, когда его ощупывал Многоугольник, внезапно резко двинулся и пронзил великого человека по диагонали. Отчасти из-за длительного заключения прапрапрадедушки и его деградации, отчасти из-за морального шока, испытанного всеми родственниками моего несчастного предка, наше семейство оказалось отброшенным на полтора градуса назад. В результате следующее поколение нашей семьи было зарегистрировано в классе углов при вершине, составляющих лишь пятьдесят восемь градусов. Потребовалось пять поколений, чтобы восполнить этот ущерб и, достигнув полного угла в шестьдесят градусов, перейти наконец из сословия Равнобедренных Треугольников в благородное сословие Равносторонних. И вся эта череда неприятностей произошла единственно из несчастного случая, происшедшего во время ощупывания.

Мне слышатся голоса некоторых из моих наиболее образованных читателей: «Откуда вы в Флатландии вообще знаете что-либо об углах, градусах или минутах? Мы, живущие в Трехмерии, видим углы, потому что обитаем в Пространстве и можем различить две прямые, расположенные под углом одна к другой. Но вы, неспособные видеть ничего, кроме отрезков прямых, вы, для которых все события представляются в виде большего или меньшего числа отрезков, расположенных на одной прямой, каким образом вы можете различить угол, а тем более говорить об углах различных размеров?»

На это я отвечаю, что хотя мы и не способны *увидеть* угол, но мы можем *сделать о нем умозаключение*, причем с величайшей точностью. Наши органы осязания, развитые в силу необходимости и усовершенствованные длительной тренировкой, позволяют нам различать углы

с гораздо большей точностью, чем ваше зрение без линейки или угломера. Нельзя не упомянуть также и о других вспомогательных средствах, предоставленных в наше распоряжение природой. По флатландскому закону природы угол при вершине Равнобедренного Треугольника может начинаться с половины градуса (или тридцати минут) и возрастать (если он вообще возрастает) на полградуса в каждом поколении до тех пор, пока не будет достигнута заветная цель — угол в шестьдесят градусов. Как только это происходит, Треугольник выходит из состояния рабства и становится свободным представителем класса правильных фигур.

Итак, самой природой нам дана восходящая шкала, или алфавит, углов через каждые полградуса вплоть до шестидесяти градусов. Образцы этих углов имеются в любой элементарной школе по всей Флатландии. Вследствие самопроизвольного вырождения, нередких случаев морального и интеллектуального застоя и необычайной плодовитости низших классов уголовных преступников и бродяг всегда имеется огромное количество индивидуумов с углом при вершине в полградуса и в один градус, а также в избытке индивидуумов с любым углом до десяти градусов. Все они полностью лишены гражданских прав и, не обладая достаточным интеллектом, чтобы быть использованным хотя бы в качестве пушечного мяса, во множестве служат государству на ниве просвещения. Скowanными по рукам и ногам, дабы исключить всякую опасность, их помещают в классы наших начальных школ в качестве Образцов, чтобы внушить отпрыскам средних слоев населения чувство такта и развить в мозгу, которого почти полностью лишены эти несчастные создания, хотя бы зачатки интеллекта.

В одних государствах Флатландии такие Образцы получают время от времени пищу и существуют на протяжении нескольких лет. В других, более развитых, расположенных в зоне умеренного климата, власти сочли более выгодным в интересах образования юношества не давать пищу Образцам, а просто ежемесячно их обновлять (месяц — максимальная продолжительность жизни представителей низших классов без пищи). В дешевых школах длительное существование Образцов не только сопряжено с более крупными расходами на питание, но и приводит к постепенному уменьшению точ-

ности углов, которые тают после нескольких недель постоянного ощупывания. Говоря о преимуществах более дорогой образовательной системы, не следует забывать и о том, что она приводит к уменьшению (хотя и незначительному, но все же ощутимому) избыточной части населения из класса Равнобедренных Треугольников — то есть способствует достижению цели, которую каждый государственный муж Флатландии неукословно преследует. Поэтому в целом (хотя мне известно, что во многих избранных школьных советах мнение склоняется в пользу так называемой дешевой системы) я лично склонен считать, что в большинстве случаев, и в особенности в данном, расходы составляют подлинную экономию.

Однако вопросы политики школьных советов не должны отвлекать меня от основной темы. Думаю, сказанного вполне достаточно, чтобы мои читатели, живущие в Трехмерии, убедились в том, что ощупывание не является столь трудоемкой или неопределенной процедурой, как могло показаться первоначально. В действительности оно более надежно, чем узнавание на слух, но, как уже отмечалось, связано с определенной опасностью. По этой причине многие представители средних и низших слоев населения Флатландии, а также все без исключения Многоугольники и Окружности предпочитают третий метод, к описанию которого мы перейдем в следующем разделе.

6. РАСПОЗНАВАНИЕ ПО ВНЕШНЕМУ ВИДУ

Быть может, некоторым читателям мое изложение покажется непоследовательным. В предыдущих разделах я сказал, что все фигуры во Флатландии представляются ее обитателям в виде прямолинейных отрезков. Отсюда следовало, что с помощью органов зрения флатландцы не могут отличать индивидуумов, принадлежащих к различным классам. Теперь же я вдруг намереваюсь объяснить моим критикам из Трехмерия, каким образом мы можем различать друг друга по внешнему виду.

Однако если читатель возьмет на себя труд еще раз просмотреть то место в моем повествовании, где говорится об ощупывании, то обнаружит, что этот метод

является универсальным лишь для низших классов. Среди представителей высших классов в нашем умеренном климате практикуется распознавание по внешнему виду.

Такой способностью обладают все флатландцы, живущие в различных районах и принадлежащие к различным классам. Эта способность обусловлена действием тумана, который держится большую часть года во всех районах Флатландии, за исключением жаркого пояса. То, что у вас, в Трехмерии, считается безусловным злом, скрывает от ваших глаз очаровательный ландшафт, ухудшает настроение, подрывает здоровье, у нас, во Флатландии, составляет не меньшее благо, чем сам воздух, и является нянькой всех искусств и отцом всех наук. Но позвольте мне объяснить смысл моих слов без дальнейших дифирамбов в честь этого благословенного явления.

Если бы не было тумана, то все линии мы видели бы одинаково ясно и четко. Именно так и происходит в тех несчастных странах, где атмосфера абсолютно суха и прозрачна. Но если в атмосфере присутствует туман, то предметы, которые находятся на расстоянии, скажем, в три фута, мы видим значительно хуже, чем предметы, расположенные на расстоянии двух футов одиннадцати дюймов. В результате тщательное и постоянное наблюдение за сравнительной ясностью или расплывчатостью линий позволяет нам делать заключение о конфигурации предметов, причем с огромной точностью.

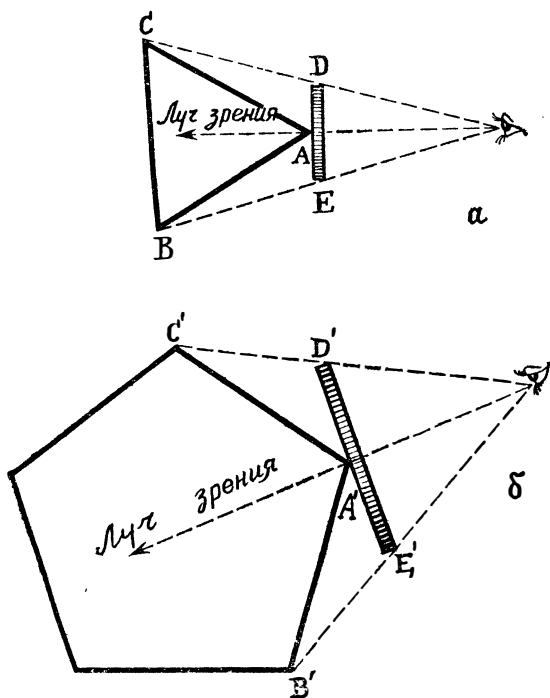
Один пример позволит вам лучше уяснить суть того, о чем я говорю, чем толстый том общих утверждений.

Предположим, что ко мне приближаются два индивидуума, ранг которых необходимо установить. Условимся считать, что один из них купец, а второй врач, или, иначе говоря, один — Равносторонний Треугольник, а другой — Пятиугольник. Каким образом я могу различить их?

В Трехмерии даже малый ребенок, едва приступивший к изучению геометрии, легко поймет, что если луч моего зрения совместить с биссектрисой угла A приближающегося незнакомца, то я смогу созерцать обе ближайшие ко мне части его тела (CA и AB), но размеры их будут выглядеть для меня одинаковыми.

Но что увижу я, если ко мне станет приближаться купец? Я увижу прямую DAE (случай a), средняя точка

которой A будет светиться наиболее ярко, потому что именно эта точка расположена ко мне ближе всего. Яркость по обе стороны ее будет *быстро спадать*, поскольку стороны AC и AB будут *скрываться от меня в тумане*, а концы прямой D и E я буду различать лишь *весьма смутно*.



Как флатландцы отличают купца от врача.

Если же ко мне будет приближаться врач (случай б), то я также увижу прямую $D'A'E'$ с ярко светящимся центром A' , однако яркость ее по обе стороны от средней точки будет *спадать не столь быстро*, поскольку стороны $A'C'$, $A'B'$ скрываются в тумане *медленнее*, чем стороны Треугольника. Поэтому вершины D' и E' тела врача я увижу *более отчетливо*, чем вершины D и E купца.

Из этих двух примеров читатель, по-видимому, поймет, каким образом после продолжительной тренировки,

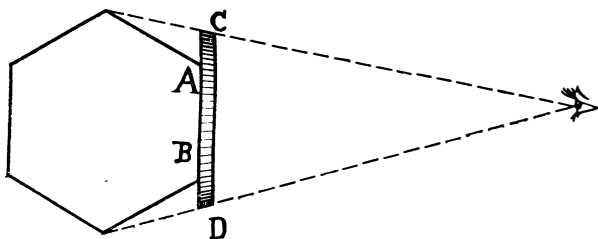
поддерживаемой ежедневными упорными упражнениями, представители наших образованных классов научились с высокой точностью распознавать по внешнему виду многоугольники средних и низших порядков. Если мои снисходительные покровители из Трехмерия усвоили это общее понятие, уверовали в возможность для флатландца различать фигуры по виду и не отвергли мой рассказ как совершенно неправдоподобный, то я достиг своей цели. Вдаваясь в дальнейшие подробности, я лишь запутал бы все дело. И все же для тех из моих юных и неопытных читателей, кто из двух приведенных выше простых примеров того, как я узнаю по виду своего отца и моих сыновей, вздумали бы сделать поспешный вывод о том, что распознавание по внешнему виду во Флатландии дело простое, я должен специально заметить, что в реальной жизни большинство из проблем распознавания по внешнему виду чрезвычайно сложны и запутанны.

Например, если мой отец, Треугольник, приближается ко мне не вершиной, а одной из сторон, то до тех пор, пока я не попрошу его повернуться или не обойду его со всех сторон, не отрывая взгляда от его очертаний, меня будут мучить сомнения, поскольку встреченный мною объект вполне мог бы оказаться Прямолинейным Отрезком, или, иначе говоря, женщиной. Еще один пример. Если я нахожусь в обществе одного из своих шестиугольных внуков и созерцаю одну из его сторон AB в ее натуральную величину, то, как видно из рисунка, я увижу целиком сторону AB , светящуюся сравнительно ярко (свечение резко гаснет на концах этой стороны), и две более короткие линии CA и BD , свечение которых постепенно спадает и исчезает к концам C и D .

Не буду поддаваться искушению и распространяться дольше на эту тему. Даже самый посредственный математик Трехмерия с готовностью согласится со мной, что проблемы жизни, с которыми сталкиваются представители образованных кругов Флатландии (находясь в движении, вращаясь, приближаясь к какой-нибудь фигуре или удаляясь от нее, они в то же время пытаются определить по внешнему виду число многоугольников высокого ранга, перемещающихся в различных направлениях, словно в зале, где дают бал или устраивают прием), способны удовлетворить тщеславие самых при-

вередливых интеллектуалов и оправдать то высокое содержание, которое получают профессора кафедры статической и кинематической геометрии в знаменитом университете Вентбриджа, где науку и искусство распознавания по внешнему виду преподают представителям элиты Флатландии.

Лишь у немногих отпрысков наиболее благородных и состоятельных семей находятся время и деньги, необходимые для изучения в полном объеме этого изысканного и ценного искусства. Даже мне, отнюдь не последнему математику Флатландии и отцу двух подаю-



Квадрат рассматривает своего внука Шестиугольника.

щих надежды и совершенно Правильных Пятиугольников, временами приходится весьма нелегко, когда я оказываюсь в толпе вращающихся Многоугольников высоких рангов. Что же касается обычных купцов, а тем более рабов, то для них вид этих фигур говорит столь же мало, как и для вас, мой читатель, если бы вы внезапно перенеслись в нашу страну.

Затерявшись в толпе фигур, вы не увидели бы ничего, кроме отрезков, отдельные части которых без всякой системы то вспыхивают ярким светом, то меркнут. Даже если бы вам удалось закончить третий курс в пятиугольном или шестиугольном классе нашего университета и вы бы овладели теорией распознавания по внешнему виду, вам все равно понадобились бы долгие годы практики, прежде чем, двигаясь в модно разодетой толпе, вы смогли бы безошибочно определять ранг ваших соседей, которых этикет запрещает опознавать «на ощупь» и которые в силу превосходства своей культуры и воспитания знают о ваших движениях все, в то время как вы ничего или почти ничего не знаете о них. Иначе

говоря, чтобы достойно вести себя в многоугольном обществе, необходимо самому быть Многоугольником. Таков во всяком случае горький опыт, извлеченный мною из собственной практики.

Любопытно отметить, до какой степени искусство (я бы сказал, инстинкт) распознавания по внешнему виду развивается при постоянной практике, если строго избегать обычая распознавать встречных ощупыванием. Как глухонемые в Трехмерии, если им разрешить жестикулировать и пользоваться ручным алфавитом, никогда не смогут научиться искусству читать по губам и понимать обычную речь, так и у нас те, кто с детства приучен распознавать встречных ощупыванием, не может в должной мере научиться распознаванию по внешнему виду. Тот, кого в детстве обучали распознаванию ощупыванием, до конца своих дней не освоит в совершенстве распознавание по внешнему виду.

По этой причине среди наших высших классов распознавание встречных ощупыванием не поощряется или абсолютно запрещено. Представители элиты следят за своими детьми с самой колыбели и посылают их не в публичную элементарную школу (где преподается распознавание ощупыванием), а в высшие семинарии закрытого типа. В нашем знаменитом университете ощупывание также считается одним из наиболее серьезных проступков. Лицо, впервые замеченное в подобной провинности, получает строгое предупреждение. При повторном замечании студент подлежит исключению из университета.

Для низших слоев флатландского общества распознавание по внешнему виду — недостижимая роскошь. Обычный купец не в состоянии послать своего сына в университет, где тот треть своей жизни посвятит изучению абстрактных наук. Поэтому детям бедноты с ранних лет разрешается распознавать встречных ощупыванием, и на первых порах их раннее развитие и живость выгодно контрастируют с инертностью, неразвитостью и апатичным поведением полуграмотных юнцов из класса Многоугольников. Однако когда последние завершают свой университетский курс и получают подготовку, необходимую для приложения теории на практике, то в них происходит резкая перемена, столь разительная, что о ней можно сказать «родился заново». Ка-

кую бы область искусства, науки или общественной жизни ни избрали своим поприщем дети элиты, всюду они одерживают верх над своими соперниками из класса Треугольников, оставляя тех далеко позади.

Лишь немногим отпрыскам из класса Многоугольников не удастся пройти Последнее Испытание, или Выпускной Экзамен, в университете. Положение, в котором оказываются эти неудачники, поистине достойно сожаления. Отвергнутые высшим классом, они не в меньшей мере презираемы и представителями низших классов. У них нет ни приобретенной зрелости и систематической тренировки многоугольных бакалавров и магистров искусств, ни природной зрелости и подвижности юных купцов. Все пути к профессиям и общественным службам оказываются для них закрытыми. И хотя во многих государствах закон не запрещает им вступление в брак, тем не менее найти себе подходящую пару для них весьма трудно. Опыт показывает, что отпрыск таких неудачливых родителей, как правило, также оказывается неудачником, даже если не вырождается в Неправильную фигуру.

Именно из этих париев, отвергнутых высшими слоями общества, черпали своих вожаков великие волнения и смуты прошлых веков. Вызванные ими потрясения были порой столь значительными, что все увеличивающееся меньшинство наших наиболее прогрессивных государственных деятелей придерживается мнения, согласно которому истинное милосердие требовало бы полного истребления неудачников. Всех, кому не удастся пройти Выпускной Экзамен в университете, следовало бы законодательным актом осуждать либо на пожизненное заключение, либо приговаривать к быстрой и безболезненной смерти.

Сам того не желая, я затронул тему о Неправильных фигурах, предмет столь животрепещущий, что ему я намерен посвятить специальный раздел.

7. О НЕПРАВИЛЬНЫХ ФИГУРАХ

На протяжении всех предыдущих страниц я молчаливо предполагал (хотя это предположение необходимо было в явном виде оговорить в самом начале, сформулировав его в виде отдельного фундаментального

утверждения), что всякое разумное существо во Флатландии представляет собой Правильную фигуру, то есть имеет правильное строение. Под этим я понимаю, что женщина должна быть не просто линией, а отрезком прямой, что ремесленник или солдат должны иметь по две равные стороны, что у купца должны быть три равные стороны, что у юриста (к этому классу принадлежу и я сам) равны четыре стороны и, вообще, у каждого Многоугольника все стороны должны быть равны.

Разумеется, длина сторон зависит от возраста индивидуума. Женщины при рождении имеют в длину всего лишь один дюйм, хотя хвост взрослой женщины порой простирается до одного фута. Что же касается мужчин из различных классов флатландского общества, то можно сказать, что длины сторон взрослой особи, если сложить их вместе, составляют около двух футов или более. Но не длины сторон интересуют меня сейчас. Я говорю о качестве сторон. Даже поверхностного размышления достаточно для того, чтобы понять важную истину: вся общественная жизнь Флатландии зиждется на том непреложном факте, что природа требует от каждой фигуры равенства всех ее сторон.

Если бы наши стороны были неравны, то и углы могли бы быть неравными. Сейчас, для того чтобы опознать встречного, нам достаточно ощупать или оценить по внешнему виду лишь один из его углов. Если бы фигуры были неправильными, ощупывать пришлось бы каждый угол. Жизнь слишком коротка для подобных трудоемких занятий. И наука, и искусство распознавания по внешнему виду сразу бы утратили всякий смысл. Метод ощупывания, поскольку и он является искусством, также оказался бы несостоятельным. Общение стало бы затруднено или вообще оказалось невозможным. Флатландцы утратили бы уверенность, потеряли бы способность предвидеть заранее результаты своих поступков. Никто не чувствовал бы себя в безопасности, сколь бы простые отношения он ни пытался завязать со своими соседями. Короче говоря, мы пришли бы к падению цивилизации, за которым наступило бы варварство.

Не слишком ли быстро я ввожу моих читателей в эти очевидные заключения? Даже минутного размышления и одного-единственного примера из повседневной жизни достаточно для того, чтобы убедиться, насколько вся на-

ша социальная система зависит от Правильности, или Равенства, Углов. Представьте себе, например, что вы встречаете на улице двух или трех купцов. Вы с первого взгляда распознаете, что перед вами представители этого сословия по их углам и быстро исчезающим в тумане сторонам, и поэтому с полной уверенностью приглашаете их зайти к вам в дом и позавтракать. Сейчас вы делаете это с абсолютной уверенностью, потому что вам известна с точностью до дюйма или двух площадь, занимаемая взрослым Равносторонним Треугольником. Но вообразите, что ваш купец имеет над своей правильной и уважаемой вершиной параллелограм с диагональю длиной в двенадцать или тринадцать дюймов. Что вы станете делать с таким чудовищем, если оно протиснется в дверь вашего дома?

Боюсь, что я наношу оскорбление здравому смыслу моих читателей, приводя здесь все эти детали, которые очевидны каждому, кто имеет счастье пользоваться преимуществами бытия в Трехмерии. Ясно, что измерения одного-единственного угла для неправильной фигуры при столь чреватых последствиями обстоятельствах недостаточно. Вся жизнь флатландца ушла бы на ощущение или обозревание периметров его знакомых. И сейчас избежать столкновения в толпе — задача, бросающая вызов пронизательности ума даже хорошо образованного Квадрата. Если же никто в обществе не сможет рассчитывать на Правильность фигур, то возникнет хаос и сумятица, а малейшая паника может привести к самым серьезным повреждениям и даже (если среди присутствующих окажутся женщины или солдаты) к трагическим исходам.

Таким образом, целесообразность, конкурируя с природой, ставит свою печать одобрения на Правильных фигурах. Закон также не одобряет отклонения от этих предначертаний. «Неправильность фигуры» означает для нас почти то же, что для вас — моральная нечистоплотность, пограние нравственных устоев и совершение уголовного преступления. Правда, находятся отдельные любители парадоксов, которые утверждают, будто отклонение от геометрической правильности не обязательно влечет за собой моральное уродство. «Неправильные фигуры, — говорят они, — с самого рождения не видят ласки от своих родителей, их осыпают

насмешками братья и сестры, ими пренебрегают их ближайшие родственники, общество обливает их презрением и относится к ним с подозрительностью, им запрещается занимать ответственные и доверенные посты и исполнять всякую полезную работу. За любым передвижением Неправильной фигуры ревностно наблюдает полиция. Наконец, Неправильная фигура достигает совершеннолетия и предстает перед комиссией для освидетельствования. Если отклонения окажутся слишком большими, фигуру разрушают, в противном случае ее замуровывают в каком-нибудь правительственном учреждении на должности клерка седьмого класса. Неправильная фигура не может вступать в брак. Обреченная на унылую деятельность, она получает ничтожную плату и должна жить и столоваться непосредственно в конторе, даже свой отпуск она проводит под неослабным наблюдением. Нужно ли удивляться тому, что даже самая лучшая и чистая натура со временем преисполнится горечью и извращается под действием такого окружения!»

Все эти правдоподобные рассуждения не убедили меня, как не убедили и наиболее мудрых из наших государственных мужей в том, что наши предки считали аксиомой своей политики: терпимость к Неправильным фигурам несовместима с безопасностью государства. Не приходится сомневаться в том, что жизнь Неправильной фигуры трудна. Но интересы подавляющего большинства населения требуют, чтобы жизнь Неправильной фигуры была именно такой. Что станет с искусством жизни, если будут множиться существа с треугольной передней и многоугольной задней частью (необходимо учесть также, что их потомки могут быть и еще более неправильными)? Нужно ли перестраивать наши дома, двери и храмы, чтобы такие чудовища могли проникать сквозь них? Должны ли наши контролеры проверять периметр каждого, прежде чем позволить ему занять место в лекционном зале? Следует ли изгонять Неправильные фигуры из рядов полиции? Если нет, то каким образом можно предотвратить те разрушения, которые может нанести своим коллегам Неправильная фигура? А сколько искушений для любителей жульничества и мошенничества открывает присутствие таких неправильных существ! Как легко Неправильной фигуре с многоугольной

передней частью войти в лавку ничего не подозревающего купца и заказать любое количество товара! Пусть адвокаты ложно трактуемой филантропии, выступающие за отмену законов о смертной казни для Неправильных фигур, говорят что хотят. Лично мне не доводилось встречать ни одной Неправильной фигуры, которая не исполнила бы роль, отведенную ей природой: не была бы лицемером, мизантропом и в пределах своих возможностей источником всяческих бед.

Я отнюдь не склонен рекомендовать (в настоящее время) крайние меры, принятые в ряде государств, где младенец, у которого угол при вершине отклоняется от угла правильной фигуры на полградуса, подлежит немедленному уничтожению. У некоторых из наших наиболее знаменитых и способных людей, подлинных гениев, в детстве наблюдались еще большие отклонения, достигавшие и сорока пяти минут. Утрата их драгоценной жизни нанесла бы непоправимый вред государству. Кроме того, искусство врачевания достигло удивительных высот в области сжатия, растяжения, трепанации, перевязок и других хирургических и диетических процедур, позволяющих частично или полностью излечивать Неправильность. Выступая, таким образом, в защиту благотворного воздействия среды, я отнюдь не хочу устанавливать какой-либо фиксированной, раз и навсегда установленной демаркационной линии. Тем не менее, если в период формирования фигуры врачебная комиссия установит, что излечение от неправильности невозможно, я предлагаю отпрыска Неправильной фигуры безболезненно и быстро умерщвлять.

8. О ДРЕВНЕЙ ПРАКТИКЕ РАСКРАШИВАНИЯ

Если мои читатели до сих пор со вниманием следили за повествованием, то они вряд ли удивятся, услышав, что жизнь во Флатландии несколько скучна. Разумеется, я отнюдь не хочу сказать, будто у нас не происходит битв, заговоров, беспорядков, интриг и тому подобных явлений, призванных разнообразить историю. Не стану также отрицать, что причудливая смесь проблем жизни и математики, непрерывно выдвигая различные гипотезы и предоставляя возможность для немедленной их

проверки, вносит в наш быт оттенок, который вряд ли ощущаете вы в своем Трехмерии. Говоря о том, что жизнь во Флатландии скучна, я имею в виду ее эстетический и художественный аспекты. Если подходить к жизни с этими мерками, то она действительно очень скучна.

Впрочем, чего еще можно ожидать, если любой вид, любой ландшафт, исторические места, портреты, цветы, натюрморты предстают в наших глазах не более чем набором прямолинейных отрезков, различающихся лишь по степени яркости?

Однако так было не всегда. Если верить легендам, примерно более шести веков назад цвет набросил свой великолепный, сверкающий покров на жизнь наших предков. В те отдаленные времена некто (в различных летописях его имя приводится по-разному) случайно открыл составные ингредиенты простейших цветов и примитивный метод раскрашивания. Рассказывают, будто сначала он раскрасил свой дом, затем своих рабов, затем отца, сыновей и внуков и наконец самого себя. Преимущества, а также красота раскраски говорили сами за себя. Где бы ни появлялся Хроматист (так называют его имя наиболее достоверные источники) со своим ярко раскрашенным контуром, он тотчас же привлекал всеобщее внимание и вызывал чувство уважения. Его не нужно было ошупывать, никто не мог бы спутать переднюю его часть с задней. Все его движения сразу же воспринимались соседями и не требовали ни малейшего напряжения для вычислений. Его никто не толкал, все уступали ему дорогу. Хроматисту не требовалось даже возвышать свой голос, чтобы утомительными криками (как это делаем все мы, бесцветные Квадраты и Пятиугольники) прокладывать себе дорогу сквозь толпу невежественных Равнобедренных Треугольников.

Мода на разноцветную окраску распространялась подобно степному пожару. Не прошло и недели, как все Квадраты и Треугольники в округе разрисовали себя по примеру Хроматиста, и лишь несколько наиболее консервативно настроенных Пятиугольников устояли перед искушением. Спустя месяц или два даже Двенадцатиугольники поддались веянию моды. Не прошло и года, как обычай разрисовывать себя яркими красками перекинулся даже на самые высшие круги. Вряд ли нужно

говорить, что он вскоре распространился и на соседние области. Спустя два поколения во всей Флатландии нельзя было найти ни одной бесцветной фигуры, кроме женщин и жрецов.

Казалось, сама природа воздвигла здесь естественный барьер, воспрепятствовав распространению новшества на эти два класса. Многосторонность была существенным моментом, который использовали приверженцы новшества. «Различие в числе сторон требует различия в окраске», — такой софизм в те времена переносился из уст в уста, обращая целые города в адептов новой культуры. Но лишь жрецы и женщины не восприняли этого призыва. Последние имели только одну сторону и поэтому, если говорить во множественном числе и совсем строго придерживаться истины, вообще не имели сторон. Первые же, провозгласившие себя истинными и единственно правильными Окружностями, а не только многоугольниками высшего ранга с бесконечным числом бесконечно малых сторон, имели обыкновение хвастаться (не без основания, что признавали женщины, хотя и считали подобные заявления предосудительными), что у них нет сторон, поскольку благословенная природа одарила их периметром, состоящим из одной линии, или Окружностью. Так и случилось, что эти две части флатландского общества не увидели особого смысла в так называемой аксиоме о том, что «различие в числе сторон влечет за собой различие в окраске». В то время как все остальные флатландцы предавались радости, раскрашивая свои тела, жрецы и женщины оставались спокойными в этих потоках краски.

Аморальные, развратные, анархические, антинаучные — каким бы из этих слов ни назвали времена востания красок, с эстетической точки зрения они все же были славным расцветом искусства Флатландии, его детством, которому так и не было суждено достичь ни поры зрелости, ни даже расцвета юности. Жить в те времена означало находиться в состоянии непрерывного восторга, ибо жить означало видеть. Даже в малочисленной компании, на небольшой вечеринке находиться было истинным удовольствием. Сочная палитра красок на общественных собраниях в церкви и в театре говорила опытному глазу гораздо больше, чем можно извлечь из выступлений величайших наших учителей и актеров.

Но самым восхитительным зрелищем было непередаваемое великолепие военного парада.

Стоило взглянуть на безупречный строй двадцати тысяч Равнобедренных Треугольников, внезапно по команде поворачивающихся, меняя тем самым угольную чернь оснований на оранжевые и пурпурные цвета двух сторон, заключающих меж собой острые углы, на воинские формирования Равносторонних Треугольников, раскрашенные в три цвета: красный, белый и синий; на лилово-розовых, ультрамариновых, черных и темно-коричневых Квадратов-артиллеристов, сноровисто хлопочущих возле своих пушек, окрашенных киноварью; на блестящих и сверкающих пятицветных и шестичетных Пятиугольников и Шестиугольников, пересекающих поле во главе штабов в сопровождении хирургов, геометров и адъютантов, стоило взглянуть на это великолепие, и все бы поверили в правдивость знаменитой истории о том, как известная Окружность, подавленная артистическим великолепием вооруженных сил, находившихся под ее командой, отбросила свой маршальский жезл и королевскую корону и провозгласила, что впредь меняет свои регалии на карандаш художника. О том, сколь славными и величественными были события тех дней, хотя бы частично можно судить по словарю и языку. Даже самые обыденные выражения зауряднейших из граждан во времена цветного восстания отличались необычайным богатством оттенков слова и мысли. Именно тому периоду мы и поныне обязаны изящнейшими образцами своей поэзии, и ритм тех дней все еще звучит в наиболее выдающихся высказываниях современной научной литературы.

9. ЗАКОН О ВСЕОБЩЕЙ ОКРАСКЕ

Но пока развивались события, все интеллектуальные забавы и искусства быстро пришли в упадок.

В искусстве распознавания по внешнему виду, коль скоро необходимость в нем отпала, перестали упражняться. Та же участь постигла занятия геометрией, статикой, кинематикой и другими родственными предметами. Их вскоре стали считать излишними, престиж их упал, и даже в нашем университете к ним начали относиться с пренебрежением. Та же судьба постигла в начальных

школах и низменное искусство распознавания ощупыванием.

С каждым днем возрастало число Равнобедренных Треугольников, которые, ссылаясь на отпавшую необходимость в Образцах, отказывались выплачивать обычную дань, взимаемую на благо просвещения с уголовных сословий, и все более дерзко поговаривали об избавлении от этого давнего налога, некогда оказывавшего благотворное действие: с одной стороны, он укрощал жестокую натуру представителей низших слоев Равнобедренных Треугольников, а с другой — уменьшал их чрезмерную численность.

Солдаты и ремесленники с каждым годом громче и громче заявляли (причем это все более соответствовало истине), что между ними и самым высшим классом Многоугольников никогда не было заметного различия, а теперь они якобы достигли полного равенства с Многоугольниками, сумеют справиться со всеми трудностями и разрешить любые жизненные проблемы, как статические, так и кинематические, пользуясь простым методом распознавания по цвету. Не довольствуясь естественным пренебрежением, с которым флатландцы стали относиться к распознаванию по внешнему виду, они начали нагло требовать запрещения законодательным путем всех «аристократических искусств, дающих постигшим их индивидуумам право на особое положение в обществе» и отмены всех различий в способностях, необходимых для изучения распознавания по внешнему виду, математики и распознавания ощупыванием. Вскоре они зашли в своих требованиях еще дальше. Ссылаясь на то, что цвет — вторая Природа — сделал излишними аристократические различия, солдаты и ремесленники начали настаивать на законодательном закреплении равноправия, дабы впредь все индивидуумы и все классы считались абсолютно равными и наделенными равными правами.

Почувствовав колебания и нерешительность высших слоев флатландского общества, предводители Восстания Красок стали выдвигать все новые и новые требования и наконец заявили, что все без исключения (в том числе жрецы и женщины) должны засвидетельствовать свое почтение Цвету, подвергнув себя раскраске. Когда им возразили, что у жрецов и женщин нет сторон, они в

ответ сослались на необходимость различать переднюю половину тела любого существа (то есть половину, содержащую глаз и рот) от его задней части — необходимость, продиктованную в равной мере природой и целесообразностью. Руководствуясь этими мотивами, предводители восстания представили на рассмотрение генеральной и чрезвычайной ассамблеи всех штатов Флатландии проект закона, гласящего, что половину тела каждой женщины, содержащую глаз и рот, надлежит окрасить в красный цвет, а другую половину — в зеленый. Точно таким же образом следовало раскрасить и тела жрецов: полуокружность, в середине которой находятся глаз и рот, следовало окрасить в красный цвет, а другую (заднюю) полуокружность — в зеленый.

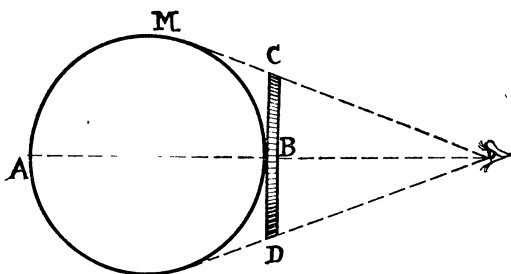
Задуман этот законопроект был весьма хитроумно, и исходил он не от какого-нибудь Равнобедренного Треугольника (ибо у существа, стоящего на столь низкой ступени развития угол при вершине был слишком мал, чтобы оно могло в должной мере оценить, а тем более выносить столь коварный замысел), а от Неправильной Окружности. Вместо того чтобы безжалостно уничтожить ее еще в младенчестве, ей необдуманно даровали жизнь, и она стала источником неисчислимых бедствий для своей страны и гибели для мириадом своих последователей.

С одной стороны, законопроект, по замыслу составителя, должен был привлечь на сторону Хроматического Новшества всех женщин независимо от того, к какому классу флатландского общества они принадлежали. Предписывая женщинам раскрашивать себя в те же два цвета, какими должны раскрашивать свои тела жрецы, деятели Восстания Красок тем самым гарантировали, что в определенных ракурсах любая женщина будет выглядеть так же, как жрец, и потому встречать ее будут с надлежащим уважением и почестями — перспектива, которая не могла не соблазнить самые широкие массы представительниц слабого пола.

Быть может, некоторым из моих читателей покажется непонятым, почему жрецы и женщины, раскрашенные в соответствии с требованиями нового законопроекта, при определенных обстоятельствах будут выглядеть одинаково. Если это так, то нескольких слов достаточно, чтобы рассеять все недоумения,

Представьте себе женщину, раскрашенную в строгом соответствии с новым законопроектом. Передняя половина ее тела (то есть половина, содержащая глаз и рот) красная, другая (задняя) — зеленая. Взгляните на эту женщину сбоку. Ясно, что вы увидите отрезок прямой, одна половина которого окрашена в красный, а другая — в зеленый цвет.

Представьте себе теперь жреца, рот которого находится в точке M , передняя полуокружность AMB окрашена в красный, а задняя — в зеленый цвет. Таким образом, диаметр AB отделяет зеленую полуокружность



Как выглядел бы раскрашенный жрец в глазах флатландца.

от красной. Взглянув на Великого Человека так, что луч вашего зрения будет направлен по диаметру AB , вы увидите отрезок прямой CBD , половина которого CB окрашена в красный, а другая половина BD — в зеленый цвет. Весь отрезок CD может оказаться гораздо короче, чем взрослая женщина, и яркость его будет убывать от середины к концам быстрее, но из-за совпадения цветов сходство между непосредственно наблюдаемой вами картиной и женщиной будет столь велико, что вы позабудете о всех прочих деталях. Примите во внимание упадок искусства распознавания по внешнему виду, угрожавший обществу во времена Восстания Красок, прибавьте к этому уверенность в том, что женщины весьма быстро научились бы приглушать яркость концов своего тела, дабы подражать Округлостям, и вам, мой дорогой читатель, станет ясно, что Закон о всеобщей окраске породил серьезную опасность, поскольку, выполнив его предначертания, мы могли бы легко принять за жреца молодую женщину.

Нетрудно представить, сколь привлекательной должна была казаться такая возможность слабому полу. Женщины с восторгом предвкушали путаницу, которая произойдет из-за подобных ошибок. У себя дома они могли бы подслушивать политические и церковные секреты, предназначенные не им, а их мужьям и братьям, и даже издавать указы от имени Окружности, носящей сан Верховного Жреца. Вне стен жилищ заметная комбинация красного с зеленым без малейшей примеси других цветов вводила бы народ в нескончаемые ошибки, и все почести, воздаваемые прохожими и не доставшиеся Окружностям, пришлось бы на долю женщин. Что же касается скандала, который разразился бы над классом Окружностей, если бы ему было приписано фривольное и неподобающее поведение женщин, и воследовавшего затем подрыва основ Конституции, то от представительниц женского пола вряд ли можно было ожидать, чтобы они приняли во внимание подобные соображения. Даже в домах, принадлежавших Окружностям, все женщины высказывались в пользу Закона о всеобщей окраске.

Вторая цель, которую преследовал автор хитроумного законопроекта,— постепенное падение нравов среди самих Окружностей. В атмосфере всеобщего духовного упадка Окружности в то время еще сохраняли жреческую чистоту и ясность мышления. С младенчества привыкнув в родительском доме к полному отсутствию Цвета, лишь представители благородных фамилий сохранили священное искусство распознавания по внешнему виду со всеми преимуществами, проистекающими от достойных всяческого восхищения постоянных упражнений разума. Так, вплоть до начала обсуждения законопроекта о всеобщей окраске Окружности не только сохранили прежнее положение в обществе, но и упрочили свое господство над иными слоями населения Флатландии, воздерживаясь от слепого следования охватившей тех моде.

Поднаторевшая в хитроумных выводах Неправильная Окружность, которую ранее я назвал подлинным автором этого дьявольского законопроекта, вознамерилась одним ударом сбросить всех, кто занимал высшие ступени в общественной иерархии Флатландии, и одновременно лишить их возможности упражняться в искус-

стве распознавания по внешнему виду, дабы ослабить их разум, как бы выдворив его из чистого, лишнего всякого цвета жилища. Пройдя хотя бы один раз окраску, взрослые и не достигшие совершенства Окружности оказывали бы друг на друга разлагающее влияние. Окружность-дитя упражняла бы свой детский ум, лишь отыскивая различия между отцом и матерью, чему, по всей видимости, неоднократно препятствовали бы обманы, чинимые последней. В итоге детская вера в правильность всех логических заключений была бы потрясена. Так, шаг за шагом, интеллектуальное превосходство Ордена Жрецов было бы сведено на нет, открыв широкую дорогу к полному низвержению всего аристократического законодательства и подрыву самого существования наших привилегированных классов.

10. О ПОДАВЛЕНИИ ВОССТАНИЯ КРАСОК

Волнения по поводу Закона о всеобщей окраске продолжались три года, и вплоть до последнего момента всем казалось, что анархии суждено восторжествовать.

Целая армия Многоугольников, которым пришлось сражаться как простым солдатам, была наголову разбита превосходящими силами Равнобедренных Треугольников (Квадраты и Пятиугольники сохраняли нейтралитет). Хуже всего было то, что некоторые из благороднейших Окружностей пали жертвой ярости собственных супругов. Доведенные до иступления атмосферой политической вражды, жены во многих благородных семьях принялись докучать своим владыкам мольбами не противиться принятию Закона о всеобщей окраске, а некоторые, убедившись в том, что самые горячие просьбы не приводят к желаемому результату, напали на своих мужей и невинных детей и, убив их, в жертвенном порыве покончили с собой. В анналах флатландской истории отмечено, что за время трехлетних волнений не менее двадцати трех Окружностей расстались с жизнью в домашних побоищах.

Обстановка складывалась весьма напряженная. Казалось, жрецам ничего не остается, как либо безропотно принять Закон, либо обречь себя на уничтожение. Но тут ход событий был полностью изменен одним из тех непостижимых случаев, которые государственному мужу

никогда не следует упускать из виду. Порою их предвидят заранее, а порою, быть может, и создают, учитывая ту непропорционально большую притягательную силу, которую подобные происшествия имеют для толпы.

Случилось так, что Равнобедренный Треугольник, крохотный мозг которого свободно умещался в угле при вершине, вряд ли превосходившем четыре градуса, случайно запачкался в красках некоего купца, чью лавку он ограбил, и выкрасил или был вынужден выкрасить себя (рассказывают по-разному) в двенадцать различных красок, как подобает Двенадцатиугольнику. Отправившись на рыночную площадь, этот Равнобедренный Треугольник, искусно изменив свой голос, заговорил с девушкой — осиротевшей дочерью благородного Многоугольника, — чьей благосклонности он безуспешно добивался ранее. После множества мошеннических проделок, которым способствовали, с одной стороны, целая вереница счастливых случаев, слишком длинная для того, чтобы рассказывать о ней подробнее, а с другой — почти непостижимая глупость и пренебрежение обычными мерами предосторожности со стороны родственников невесты, этому Равнобедренному Треугольнику удалось вступить в брак с сиротой. Когда обман раскрылся, несчастная девушка покончила с собой.

Едва весть об этой трагедии стала распространяться из одного штата в другой, как умы женщин пришли в страшное волнение. Сочувствие к несчастной сироте и опасение, что жертвами подобных мошеннических проделок могут стать они сами, их сестры и дочери, заставили женщин совершенно иначе взглянуть на Закон о всеобщей окраске. Нашлось немало женщин, открыто заявивших о своем переходе в лагерь противников этого Закона. Остальным недоставало лишь самой малости, чтобы тоже выступить с аналогичными заявлениями. Воспользовавшись благоприятной обстановкой, Окружности настояли на созыве чрезвычайной ассамблеи штатов и помимо обычной охраны, набираемой из числа преступников, обеспечили присутствие большого количества женщин, настроенных против Закона.

При небывалом стечении народа под шиканье и враждебные выкрики ста двадцати тысяч Равнобедренных Треугольников поднялась Верховная Окружность (в те дни ею был Пантоцикл). Но стоило ей лишь

заявить, что впредь Окружности намерены придерживаться политики соглашения и, уступая желанию большинства, принимают Закон о всеобщей окраске, как шум тотчас же смолк. Враждебные выкрики сменились аплодисментами. Пантоцикл пригласил Хроматиста, возглавившего восстание, пройти в центр зала, дабы от имени своих сторонников принять изъявление покорности от правящих кругов Флатландии. Затем последовала речь, непревзойденный шедевр красноречия, которая заняла почти целый день. Краткий пересказ бессилён передать ее великолепие.

Всем своим видом выражая мрачное бесстрашие, Верховная Окружность заявила, что, поскольку Окружности наконец выразили готовность подчиниться Реформе, или Новшеству, было бы желательно окинуть последним взглядом периметр всего дела и рассмотреть его преимущества и недостатки.

Перечисляя одну за другой опасности, которыми чревато принятие Закона для купцов, представителей различных профессий и джентльменов, Верховная Окружность пресекла поднятый было Равнобедренными Треугольниками ропот упоминанием о том, что, несмотря на все названные ею недостатки, она с готовностью примет Закон, если тот будет одобрен большинством. Но все присутствующие, за исключением Равнобедренных Треугольников, были настолько потрясены ее словами, что заняли по отношению к Закону либо нейтральную, либо резко отрицательную позицию.

Обращаясь к рабочим, Верховная Окружность сказала, что принять Закон об окраске они должны, отчетливо сознавая все последствия для себя подобного акта. Многие из рабочих, говорила Верховная Окружность, были на грани того, чтобы их приняли в класс Правильных Треугольников; многие ожидали отличия, на которое не могли рассчитывать сами, для своих детей. Этими честолюбивыми планами, заслуживавшими ранее всяческого поощрения, ныне придется пожертвовать. С принятием Закона о всеобщей окраске все различия исчезнут. Правильность смешается с Неправильностью, прогресс уступит место регрессу. Рабочий за несколько поколений деградирует до уровня солдата или даже преступника. Политическая власть окажется в руках большинства, то есть представителей уголовных

сословий, которых всегда было больше, чем рабочих. Вскоре, когда обычные законы компенсации в природе нарушатся, преступные элементы по своей численности превзойдут все другие классы флатландского общества, взятые вместе.

Приглушенный ропот пробежал по рядам ремесленников, и Хроматист в тревоге попытался успокоить их. Но его тут же окружила охрана, заставив замолчать, пока Верховная Окружность в заключение своей речи не обронила несколько бесстрастных слов, обращенных к женщинам. Если Закон о всеобщей окраске будет принят, то брак превратится в довольно опасное предприятие. Честь женщины окажется под угрозой. Ложь, жульничество, лицемерие проникнут в каждый дом. Благословенный домашний очаг постигнет судьба Конституции, и он вскоре погаснет. «Но еще скорее,— воскликнула Верховная Окружность,— наступит смерть!»

При этих словах, которые были условным сигналом к действию, Равнобедренные преступники напали на несчастного Хроматиста и пронзили его. Представители Правильных Многоугольников расступились, давая дорогу отряду женщин под предводительством Окружностей. Продвигаясь вперед задней частью тела, эти воительницы незримо и безошибочно ринулись на солдат, лишенных способности рассуждать. Ремесленники, следуя примеру своих начальников, также расступились. Тем временем отряды преступников заняли все входы, выстроившись около них сплошными рядами.

Битва, или, скорее, побоище, была быстрой. Под искусным водительством Окружностей почти каждый удар, наносимый женщинами, оказывался роковым, многие из них вытаскивали свои жала неповрежденными, готовыми к нанесению второго удара. Но необходимости во втором ударе не было: толпа Равнобедренных Треугольников сама завершила то, что начали ее противники. Захваченные врасплох, потерявшие своего предводителя, атакуемые с фронта невидимыми врагами, лишенные путей к отступлению отрядами преступников, Равнобедренные Треугольники сразу же (на свой манер) потеряли головы и подняли крик об «измене». Это решило их судьбу. Каждый Равнобедренный Треугольник видел и ощущал врага в любом своем равнобедренном собрате. Через полчаса после начала побои-

ща в живых не осталось ни одного Равнобедренного Треугольника. Останки ста двадцати тысяч преступных обитателей Флатландии, убивших друг друга своими вершинами, красноречиво свидетельствовали о триумфе Порядка.

Окружности не замедлили довести свой успех до полной и окончательной победы. Рабочих они отпустили на свободу, предварительно казнив каждого десятого. Ополчение, созданное из Равносторонних Треугольников, было немедленно распущено. Каждый Треугольник, подозреваемый с достаточным основанием в Неправильности, приговаривался Военным Трибуналом к уничтожению, минуя формальную процедуру точного измерения его углов Социальной Комиссией. Жилища солдат и ремесленников в течение года после побоища подвергались периодическим досмотрам. В каждом городе, поселке и деревушке систематически производились чистки, во время которых Окружности избавлялись от избыточной части низших слоев населения, образовавшейся вследствие невыплаты преступниками налога в пользу школ и университета и нарушения других естественных законов Флатландии. Тем самым был вновь восстановлен баланс между различными слоями населения.

Нужно ли говорить, что употребление Цвета на будущие времена было строжайше запрещено, а разноцветная окраска объявлена вне закона. Даже упоминание слов, означающих Цвет, влекло за собой суровое наказание (исключение делалось лишь для Окружностей и наиболее сведущих преподавателей научных дисциплин). Правда, власти не возбраняли экономное расходование красок для иллюстрации некоторых наиболее глубоких проблем математики, но только в самых высших и эзотерических классах нашего университета. Впрочем, и это точно не известно, я говорю лишь понаслышке.

Ныче во всей Флатландии Цвет более не существует. Искусство изготовления красок известно лишь одному-единственному лицу — Верховной Окружности, которая правит в данное время. На смертном одре она передает эту тайну своему преемнику. Краски производит единственная во всей Флатландии фабрика, а чтобы никто не выдал секрет их изготовления, рабочих ежегодно истребляют, а на их место набирают новых — столь

велик страх, с которым наша аристократия оглядывается на давно минувшие дни волнений, вызванных обсуждением Закона о всеобщей окраске.

11. О НАШИХ ЖРЕЦАХ

Настало наконец время, когда я должен перейти от кратких и ретроспективных заметок о жизни и нравах Флатландии к центральному событию всей книги — моему посвящению в тайны Пространства. Именно эти тайны и составляют подлинное содержание моей книги, в то время как все предыдущее было не более чем предисловием.

Именно по этой причине мне приходится умалчивать о многом из того, что, смею льстить себя надеждой, было бы небезынтересно узнать моим читателям: например, о том, как мы передвигаемся и останавливаемся, хотя у нас нет ног; как мы, у которых нет рук, не имея возможности закладывать фундаменты, как это делаете вы, или использовать боковое давление земли, тем не менее ухитряемся возводить прочные здания из дерева, камня и кирпича; как в промежутках между различными зонами Флатландии зарождаются дожди и северные районы не мешают влаге выпадать на южные; о природе наших холмов и шахт, деревьев и овощей; о том, как происходит у нас смена времен года и сбор урожая; о нашем алфавите, приспособленном к нашим линейным табличкам; о наших газетах, расположенных на наших линейных сторонах. Обо всех этих и множестве других подробностей нашего физического существования мне остается лишь умолчать, и упоминаю я здесь о них лишь для того, чтобы читатель понял: эти любопытные моменты опущены не по забывчивости автора, а единственно по той причине, что автор, ценя время читателя, не хотел бы злоупотреблять его вниманием.

И все же, прежде чем перейти к основному предмету моего повествования, я хочу сделать несколько последних замечаний о столпах и хранителях Конституции Флатландии, о тех, кто следит за нашим поведением и решает наши судьбы, о тех, кто окружен всеобщим почтением, чтобы не сказать благоговением. Нужно ли говорить, что я имею в виду наши Окружности, или Жрецов.

Когда я называю их Жрецами, меня отнюдь не следует понимать только в том смысле, какой вы вкладываете в этот термин. У нас во Флатландии Жрецы занимают ведущие посты во всех отраслях коммерческой деятельности, искусства и науки. Они руководят розничной и оптовой торговлей, армией, архитектурой, промышленностью, решают наиболее важные государственные дела, им принадлежит самое веское слово в вопросах законодательства, морали и теологии. Не делая ничего сами, они являются побудителями, причиной всего, что следует делать и делается другими.

Хотя многие флатландцы полагают, будто те, кого они называют Окружностями, являются таковыми, представителям более образованных классов известно, что Окружность в действительности является не Окружностью, а лишь Многоугольником с очень большим числом очень малых сторон. Когда число сторон возрастает, то Многоугольник все более приближается к Окружности, а при очень большом числе сторон, например при числе сторон, равном тремстам или четыремстам, различить угол Многоугольника на ощупь становится трудно. Впрочем, правильнее было бы сказать «стало бы трудно», поскольку, как уже упоминалось выше, распознавание ощупыванием не принято в высшем обществе и ощупывание Окружности было бы расценено как наглое оскорбление. Привычка воздерживаться от ощупывания, распространенная в высшем обществе, позволяет Окружности легко сохранять тот покров таинственности, которым она с детских лет стремится окутать точные сведения о своем периметре. Средняя длина периметра составляет примерно три фута. Следовательно, если Многоугольник имеет триста сторон, то длина каждой составляет не более одной сотой фута, или немногим больше одной десятой дюйма. У Многоугольника с числом сторон, достигающим шестисот или семисот, стороны чуть больше диаметра привычной вам булавочной головки. Из вежливости принято считать, что число сторон у правящей в настоящее время Верховной Окружности равно десяти тысячам.

Восхождение потомков Окружностей по общественной лестнице не в такой мере ограничено законом природы, устанавливающим предел для увеличения числа сторон (равный одной дополнительной стороне за одно

поколение), как восхождение отпрысков семейства, относящихся к низшим классам Правильных Многоугольников. Если бы действие упомянутого закона природы распространялось в равной мере на все Правильные Многоугольники, то число сторон у любой Окружности было бы лишь вопросом ее родословной и арифметики, а четыреста девяносто седьмой потомок Равностороннего Треугольника непременно был бы Многоугольником с пятьюстами сторонами. Однако в действительности наблюдается иная картина. Закон природы устанавливает для распространения высших Правильных Многоугольников, или Окружностей, две противоположные тенденции: во-первых, по мере того как раса продвигается вверх в своем развитии, само развитие происходит со все возрастающей быстротой; во-вторых, по мере увеличения скорости развития раса становится менее продуктивной. В жилище Многоугольника с числом сторон, достигшим четырехсот или пятисот, редко можно встретить сына и никогда нельзя увидеть более одного потомка. С другой стороны, известны случаи, когда у сына Многоугольника с числом сторон, равным пятьюстам, было пятьсот пятьдесят и даже пятьсот шестьдесят сторон.

Искусство также приходит на помощь высшей эволюции. Наши врачи обнаружили, что маленькие и хрупкие стороны младенцев-Многоугольников, принадлежащих к высшему классу, можно переломать, а весь их контур — пересоставить заново с такой точностью, что иногда (но отнюдь не всегда, ибо эта операция сопряжена с серьезным риском) Многоугольнику с двумястами или тремястами сторонами удается «перепрыгнуть» двести или триста поколений и как бы одним махом удвоить число своих предков и благородство своего происхождения.

Множество детей, подававших большие надежды, гибнет после такой операции. Выживает в лучшем случае один из десяти. И все же родительское тщеславие Многоугольников, стоящих «на пороге» класса Окружностей, столь велико, что трудно найти представителя благородного сословия, достигшего столь высокого положения, который бы не отдал своего первенца в Круговую неотерапевтическую гимназию, не дожидаясь, пока тот достигнет месячного возраста,

Чем заканчивается операция, успехом или неудачей, выясняется к концу года. К этому времени к многочисленным надгробиям, заполняющим неотерапевтическое кладбище, как правило, добавляется еще одно, но в редких случаях радостная процессия выносит малыша его ликующим родителям, выносит не Многоугольник, а Окружность (или по крайней мере фигуру, которую из вежливости можно было бы назвать Окружностью). Редкий пример столь счастливого исхода побуждает множество Многоугольников-родителей приносить новые жертвы.

12. ОБ УЧЕНИИ НАШИХ ЖРЕЦОВ

Что касается учения наших Жрецов, то его можно кратко сформулировать в виде одной-единственной максимы «Следите за вашей Конфигурацией». О каких бы проблемах — политических, религиозных или моральных — ни шла речь, учение наших Жрецов неизменно направлено на улучшение Конфигурации, личной или сообщества, причем особое внимание уделяется Конфигурации Окружностей, которым подчинены все остальные фигуры.

Несомненной заслугой Окружностей следует считать то, что они сумели весьма действенно подавить древние ереси, заставлявшие людей напрасно тратить энергию и предаваться излюбленным размышлениям в пагубном заблуждении, будто поведение зависит от воли, усилий, подготовки, поощрения, похвал и чего-нибудь еще, кроме Конфигурации. Пантоцикл (уже упоминавшаяся нами знаменитая Окружность, снискавшая славу усмирителя Восстания Красок) был первым, кто сумел убедить сограждан в том, что Конфигурация предопределяет их судьбу. Иначе говоря, если вы родились, например, Равнобедренным Треугольником с двумя неравными боковыми сторонами, то вы непременно кончите плохо. Единственное спасение для вас состоит в том, чтобы сделать свои боковые стороны равными, а для этого надлежит отправиться в госпиталь для Равнобедренных Треугольников. То же самое, если вы родились Равносторонним Треугольником, Квадратом или даже Многоугольником, но страдаете какой-нибудь Неправильностью, вас

необходимо направить на излечение в один из госпиталей для Правильных фигур. В противном случае вы окончите свои дни в тюрьме или на вершине угла государственного палача.

Все промахи или ошибки поведения — от самых незначительных проступков до тягчайших преступлений — Пантоцикл приписывал некоторым отклонениям от идеальной Правильности в строении фигуры, либо врожденным, либо благоприобретенным (например, вызванным столкновением с другой фигурой в толпе, возникшим вследствие недостаточных или, наоборот, чрезмерных физических упражнений или даже резких изменений температуры, которые привели к сморщиванию или расширению некоторой особо чувствительной части контура фигуры). «Таким образом,— заключил знаменитый Философ,— ни хорошее, ни плохое поведение по зрелом размышлении не является особо подходящим предметом ни для похвалы, ни для порицания. Почему, например, вы должны восхвалять честность Квадрата, отстаивающего интересы своего клиента, когда в действительности вам скорее надлежит восхищаться безупречностью его прямых углов? Почему вы должны порицать изолгавшегося, вороватого Равнобедренного Треугольника, тогда как вам надлежало бы винить неизлечимое неравенство его боковых сторон?»

Теоретически такое учение неоспоримо, но при попытках применить его на практике оно обнаруживает кое-какие недостатки. Если вы имеете дело с Равнобедренным Треугольником и мошенник пытается убедить вас в том, что он не может не воровать, поскольку на преступление его неудержимо толкает неравенство боковых сторон, то вы отвечаете на это, что по той же самой причине, по которой он не может не возмущать покоя своих соседей, вы, судья, не можете не приговорить его к смертной казни, и вопрос этим полностью исчерпан. Но представьте себе небольшой семейный конфликт, в котором о наказании смертной казнью не может быть и речи, и тогда теория Конфигурации может завести вас в тупик. Должен признаться, что, когда однажды один из моих внуков-шестиугольников, оправдывая свое дурное поведение, сослался на резкое изменение температуры, которое якобы оказалось чрезмерным для его периметра, мне пришлось согласиться с тем, что виноват

не он, а его Конфигурация. И хотя его Конфигурация могла исказиться разве что от избытка поглощенных им леденцов, я не видел способа ни логически опровергнуть, ни практически принять его рассуждения.

Со своей стороны, я считал наиболее разумным предположить, что хорошая взбучка или основательная порка возымеют определенное скрытое воздействие на Конфигурацию моего внука и послужат ей на укрепление, хотя, должен признаться, у меня не было ни малейших оснований для такого заключения. Во всяком случае, не я один выпутывался из подобной дилеммы указанным образом. Мне доподлинно известно, что многие из высших Окружностей, исполняющих судебские обязанности, восхваляют достоинства Правильных и порицают пороки Неправильных фигур, а у себя дома, применяя к своим детишкам телесные наказания, говорят о «добре» и «зле» с таким убеждением и пылом, как будто эти слова означают нечто реально существующее и фигура способна выбирать между тем и другим.

Последовательно проводя свою политику превращения Конфигурации в идею, которая должна овладеть умами всех и каждого, Окружности обратили природу послушания, определяющего в Трехмерии отношения между родителями и детьми, в свою противоположность. У вас в Пространстве детей учат почитать своих родителей. У нас глава семьи должен почитать (разумеется, после Окружностей, служащих примером всеобщего почитания) своего внука, если таковой имеется, или же своего сына.

Но из того, что мы почитаем своих детей и внуков, отнюдь не следует, будто мы потакаем любым их желаниям. «Почитать» у нас означает учитывать высшие интересы. Окружности учат нас, что обязанность отцов состоит в подчинении собственных интересов интересам потомства и тем самым в приумножении благосостояния всего государства, равно как и благосостояния своих ближайших потомков.

Уязвимым местом в учении Окружностей (если недостойному Квадрату вообще позволительно говорить о пороках или изъянах чего-либо, исходящего от Окружностей), на мой взгляд, являются их отношения с женщинами.

Поскольку для общества необычайно важно не поощрять рождения Неправильных фигур, то женщина, имеющая малейшие отклонения от Правильности в своей родословной, не может считаться подходящим партнером для того, кто жаждет, чтобы его потомство поднялось на несколько ступеней по общественной лестнице.

Неправильность мужчин легко поддается измерению, а поскольку все женщины имеют форму прямолинейных отрезков и внешне выглядят Правильными фигурами, то для того, чтобы убедиться в их, с позволения сказать, скрытой Неправильности, то есть предусмотреть потенциальную Неправильность в их потомстве, необходимо изыскать какие-то другие средства. Такими средствами служат подробные родословные, которые ведутся и хранятся в специальных государственных учреждениях. Без официально заверенной родословной ни одной женщине не разрешается вступать в брак.

Можно было бы предположить, что Окружности, гордые своими предками и заботящиеся о своих отпрысках, которые в отдаленном потомстве могут стать Верховной Окружностью, более осмотрительно, чем другие, выбирают жен и следят за тем, чтобы репутация предполагаемых спутниц жизни была безупречной. К сожалению, это отнюдь не так. По мере того как фигура становится все более правильной, ее осмотрительность в выборе жены падает. Ничто не в силах заставить Равнобедренный Треугольник, преисполненный надежд породить Равностороннего сына, взять в жены женщину, среди предков которой имеется хотя бы одна-единственная Неправильная фигура. Квадрат и Пятиугольник, уверенные в неуклонном восхождении своей семьи по общественной лестнице, не станут интересоваться пятисотым коленом в родословной будущей жены. Шестиугольники или Десятиугольники проявляют еще большую беспечность в том, что касается предков невесты. Окружность же, не задумываясь, выберет себе в жены девицу, у которой прадедушка был Неправильной фигурой, лишь потому, что у нее чуть больше лоска, чем у других, или потому, что жених не в силах устоять перед чарами ее грудного голоса (у нас еще в большей степени, чем у вас, принято считать, что грудной голос «придает особую прелесть» его обладательнице).

Как и следует ожидать, такие необдуманные браки не способствуют улучшению рода, если только не приводят к появлению явно Неправильной фигуры или мало заметному уменьшению некоторых из сторон. Ни одно из этих зол до сих пор не оказалось достаточно устрашающим для того, чтобы послужить предостережением на будущее. Утрату нескольких сторон у достаточно хорошо развитого Многоугольника заметить нелегко, и иногда этот недостаток удается исправить в неотерапевтической гимназии, о чем я уже рассказывал, а Окружности весьма охотно соглашаются на бесплодные браки, рассматривая их чуть ли не как закон развития высших Многоугольников. И все же, если не пресечь это зло, то постепенное истощение класса Окружностей в недалеком будущем может ускориться, и тогда наступит время, когда Окружности уже не смогут произвести Верховную Окружность, и тем самым падение Конституции Флатландии будет предreshено.

Еще одно предостережение приходит мне на ум, хотя я не могу с такой же легкостью указать средство для исцеления порока. И в этом случае речь идет о наших отношениях с женщинами. Лет триста назад Верховная Окружность издала указ, согласно которому женщин, поскольку они лишены рассудка, но с избытком наделены эмоциями, не следует причислять к мыслящим существам и давать им образование. В итоге женщин перестали учить читать и даже знакомить с арифметикой в объеме, который позволил бы им сосчитать число вершин у мужа или у детей. Нужно ли удивляться тому, что умственные способности женщин с каждым поколением все больше угасают. И такая система женского «необразования», или квиетизм, сохраняется и поныне.

Боюсь, что такая политика, хотя она и была введена с самыми лучшими намерениями, ныне зашла слишком далеко и не может не сказываться отрицательно на представителях мужского пола.

При нынешнем положении вещей в результате такой политики мы, мужчины, вынуждены вести «двухъязыковое» (я мог бы сказать даже «двухсознательное») существование. Находясь в обществе женщин, мы говорим о «любви», «долге», «добре», «зле», «сострадании», «надежде» и других иррациональных и эмоциональных по-

нениях, которые в действительности не существуют и были вымышлены с единственной целью — хоть как-то справиться с женской склонностью к преувеличениям. Когда же мы находимся в своем, мужском, кругу или пишем книги, то пользуемся совсем иным словарем, чтобы не сказать идиомами. «Любовь» у нас, мужчин, означает «предвкушение каких-то выгод», «долг» превращается в «необходимость» или «целесообразность». Аналогичные изменения претерпевают и другие слова. Более того, находясь в обществе женщин, мы пользуемся языком, свидетельствующим о нашей крайней почтительности к их полу. Женщины уверены, что даже Верховной Окружностью мы восхищаемся не столь пылко, как ими. Тем не менее за спиной женщин мы (за исключением самых юных) отзываемся о них как о существах, лишь немногим превосходящих «неразумные организмы».

Наша теология в женских покоях также полностью отлична от нашей теологии в иных местах.

Именно поэтому я опасаясь, что необходимость проходить двойную подготовку как в языке, так и в мышлении, оказывается чрезмерно тяжелой ношей для подрастающего поколения, особенно когда наших мальчиков в трехлетнем возрасте забирают из-под материнской опеки и заставляют отвыкать от старого языка (заученные ранее слова необходимы лишь для повторения в присутствии матерей и нянюшек) и выучивать словарь и идиомы науки. Сдается мне, что уже сейчас флатландцы усваивают математические истины не с той легкостью, с какой усваивал их полный жизненных сил разум наших предков триста лет назад. Я не говорю уже о возможной угрозе, которая нависнет над обществом, если какая-нибудь женщина тайком выучится читать и перескажет своим подругам содержание одной-единственной прочитанной ею книги или если какой-нибудь подросток мужского пола по неосторожности или из-за непослушания раскроет своей матери тайны логического диалекта. Исходя из самоочевидного факта ослабления мужского интеллекта, я возвышаю свой слабый голос, дабы представители самой высшей власти вняли моему предостережению и пересмотрели нормы и правила женского образования.

ЧАСТЬ II

ИНЫЕ МИРЫ

*Отважны новые миры,
Коль в них живут такие люди!*

13. КАК МНЕ ПРИВИДЕЛАСЬ ЛАЙНЛАНДИЯ

Шел предпоследний день 1999 года нашей эры и первый день Долгих Каникул. Просидев допоздна за своим любимым занятием — геометрией, я отправился на покой, размышляя об одной нерешенной задаче. Ночью мне привиделся сон.

Множество крохотных Прямолинейных Отрезков (естественно, я решил, что это женщины) вперемежку с другими, еще более мелкими существами, похожими на светящиеся Точки, двигалось взад-вперед, вдоль одной и той же Прямой, причем, насколько я мог судить, с одной и той же скоростью.

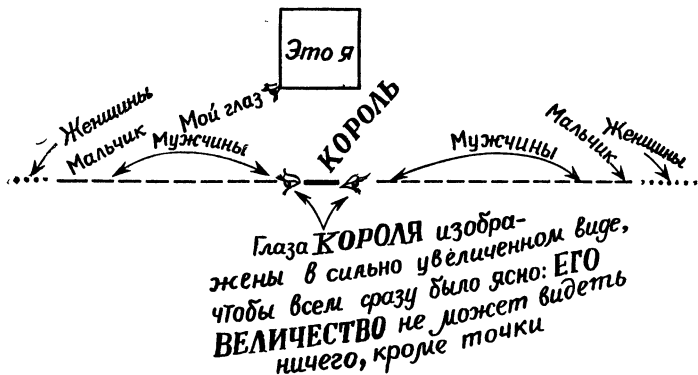
В своем движении фигурки издавали неясный многоголосый шум, напоминавший чириканье или щебетанье. Временами фигурки замирали, и тогда наступала тишина.

Приблизившись к самому большому Отрезку, который я было принял за женщину, я попытался заговорить с ним, но не получил ответа. Вторая и третья попытки привлечь внимание Отрезка закончились столь же безуспешно. Выведенный из себя такой, как мне показалось, невыносимой грубостью, я встал таким образом, чтобы мой рот оказался прямо против рта женщины, дабы воспрепятствовать ее движению вперед, и громко повторил свой вопрос:

— Женщина, что означает это столпотворение, странное едва различимое чириканье и однообразное движение вперед и назад вдоль одной и той же прямой?

— Я не женщина,— ответил крохотный отрезок.— Я монарх, правящий этим миром. Кто ты и откуда ты вторгся в пределы подвластной мне Лайнландии?

Услышав все это, я попросил извинить меня, если невольно испугал или обеспокоил его королевское величество. Назвавшись незнакомцем, я попросил короля Лайнландии хотя бы кратко рассказать о его подданных и владениях. Получить какие-либо сведения о Точках, которые чрезвычайно заинтересовали меня, оказалось весьма непросто, поскольку монарх в своих объяснениях неизменно исходил из допущения, будто все, что знает он сам, известно и мне и я лишь в шутку притворяюсь несведущим.



Квадрат во время своего воображаемого визита в Лайнландию.

Однако хитроумно поставленные вопросы помогли мне выведать у короля следующее.

Оказалось, что этот несчастный, как он называл себя, монарх находился в твердом убеждении, будто Прямая, которую он называл своим королевством и где провел всю свою жизнь, составляет весь мир и все Пространство. Лишенный возможности передвигаться где-либо или видеть что-либо, кроме своей Прямой, его величество не мог представить себе ничего другого, кроме нее. Хотя король и услышал мой голос, когда я в первый раз обратился к нему, звуки дошли до него столь странным образом, настолько противоречившим всему предшествовавшему опыту, что монарх Лайнландии не посчитал нужным ответить.

— Никого вокруг не было видно,— пояснил король,— а послышавшийся мне голос исходил как бы изнутри меня.

До тех пор пока мой рот не оказался в его мире, король не видел меня и не слышал ничего, кроме смутных звуков, достигавших его тела там, где, на мой взгляд, расположен его бок, а по словам короля, находился его желудок (который он также называл внутренностью). Монарх Лайнландии даже после нашей встречи не имел ни малейшего представления о том, откуда я появился. Вне его мира, или Прямой, для короля простиралась пустота, нет, даже не пустота, ибо пустота подразумевает Пространство, а небытие.

Подданные монарха (из которых Отрезки были мужчинами, а Точки — женщинами), так же как и их суверен, могут двигаться и видеть лишь вдоль единственной Прямой, образующей их мир. Вряд ли нужно говорить о том, что весь горизонт лайнландцев ограничен одной Точкой. Никто из подданных его величества не может видеть ничего кроме Точки. Мужчина, женщина, ребенок, неодушевленный предмет — в глазах лайнландца все выглядит одинаково: в виде Точки. Пол или возраст обитатели Лайнландии различают лишь по голосам. Кроме того, поскольку каждый лайнландец полностью занимает всю ширину узкой полоски, составляющей, если можно так выразиться, всю их Вселенную, и никто не может сдвинуться ни влево, ни вправо, чтобы уступить дорогу другому, то ни один лайнландец не может обогнать другого или отстать от него. Те, кто хоть раз оказался рядом, вынуждены оставаться рядом навсегда. Быть соседями у лайнландцев означает примерно то же, что у нас состоять в браке: узы соседства, как и узы брака, не распадаются до тех пор, пока смерть не разлучит партнеров.

Жизнь, где все, чего ни коснется взгляд, представляется Точкой, а двигаться можно лишь вдоль одной-единственной Прямой, показалась мне невыносимо скучной, и я с удивлением отметил живость и жизнерадостность короля. Мне было интересно узнать, возможно ли при обстоятельствах, столь неблагоприятных для семейных отношений, наслаждаться радостями брачного союза, но я некоторое время колебался, не решаясь задать его величеству столь деликатный вопрос. Набравшись наконец решимости, я осведомился у короля о здоровье его семейства.

— Мои жены и дети,— ответил король,— находятся в полном здравии и весьма счастливы.

Пораженный его ответом (ибо в непосредственной близости от монарха, как я успел заметить во сне, прежде чем вступил в пределы Лайнландии, находились одни лишь мужчины), я отважился задать еще один вопрос:

— Прошу извинить, но я не могу представить, каким образом ваше королевское величество может видеться с их величествами или приближаться к ним, когда вас разделяют по крайней мере полдюжины ваших подданных? Разве в Лайнландии совместная жизнь не обязательна для тех, кто вступает в брак и имеет детей?

— Как тебе могла прийти в голову такая нелепая мысль? — удивился монарх.— Если бы все обстояло так, как ты говоришь, то Вселенная давно опустела бы! Нет! Соседство не является необходимым для союза сердец, а рождение ребенка — слишком важное событие, чтобы оно могло зависеть от такой случайности, как совместное проживание, и ты не можешь не знать об этом. И все же, поскольку тебе доставляет удовольствие разыгрывать из себя простака, я возьму на себя труд просветить тебя, будто ты наивнейший из младенцев Лайнландии.

Итак, да будет тебе известно, что при заключении браков наибольшее значение имеют слух и способность издавать звуки. Ты, разумеется, знаешь, что у каждого мужчины есть не только два глаза, но и два рта (по одному на каждом конце его тела), и два голоса: бас и тенор. Каждый рот говорит своим голосом. Я не стал бы упоминать об этом, если бы за время нашего разговора мне удалось различить твой тенор.

— У меня лишь один голос, — пояснил я, — и мне ничего не было известно о том, что у вашего королевского величества два голоса.

— Это лишь подтверждает то впечатление, которое создалось у меня о тебе, — ответил король.— Ты не мужчина, а чудовище женского пола, говорящее басом и обладающее в высшей степени неизощренным слухом. Но продолжу свой рассказ. Сама природа распорядилась так, чтобы у каждого мужчины было по две жены.

— Почему по две? — недоуменно спросил я.

— В своей притворной наивности ты заходишь слиш-

ком далеко, — воскликнул монарх. — Может ли быть гармоничным союз без сочетания Четырех в Одном, а именно без сочетания мужского баса и тенора с сопрано и контральто двух женщин?

— А как быть, — сказал я, — если мужчина предпочитает иметь одну жену или трех жен?

— Такого просто не может быть, — ответил король, — как не может сумма двух и одного равняться пяти, а человеческий глаз — созерцать Прямую.

Тут я хотел было прервать его, но правитель Лайнландии продолжил свою речь:

— Раз в неделю закон природы вынуждает нас с особой силой ритмично двигаться вперед и назад вдоль Прямой. Продолжается это движение ровно столько времени, сколько хватило бы вам, чтобы сосчитать до ста одного. Посреди всеобщего танца на пятьдесят первом такте обитатели Вселенной с разбегу останавливаются, и каждый издает самый сладкозвучный, гармоничный и прекрасный вопль, на который только способен. Именно в этот решительный момент и заключаются все наши браки. Гармония баса и дисканта, тенора и сопрано столь совершенна, что иногда влюбленные, находясь на расстоянии двадцать тысяч лиг друг от друга, узнают ответную ноту своего суженого, и любовь, преодолевая ничтожные препятствия, чинимые расстоянием, объединяет всех троих брачующихся. В тот же миг совершившийся брак приводит к появлению трех отпрысков мужского и женского пола, занимающих подобающее им место в Лайнландии.

— Как? Дети в Лайнландии рождаются всегда по трое? — спросил я. — Но тогда у одной из жен должны рождаться близнецы.

— О чудовище, говорящее басом! Все обстоит именно так, — ответил король. — Как иначе могло бы поддерживаться равновесие полов, если бы на каждого мальчика не приходилось по две девочки? Уж не хочешь ли ты пренебречь азбучными истинами природы?

Тут король замолчал, утратив от ярости дар речи. Прошло немало времени, прежде чем он закончил свое повествование.

— Разумеется, не следует думать, будто любой холостяк в Лайнландии, стоит ему лишь издать свой первый вопль во всеобщем Брачном Хоре, сразу же обретает

своих суженых. Наоборот, поиск невест в большинстве случаев приходится повторять по многу раз. Лишь избранным сердцам выпадает счастливый жребий сразу же распознать среди чужих голосов голос партнера, уготованного ему провидением, и устремиться во взаимные идеально гармоничные объятия. У подавляющего большинства лайнландцев поиск супруги длится довольно долго. Голос вопиющего может великолепно гармонировать с голосом одной из будущих жен, но дисгармонировать с голосом другой. Может случиться и так, что голос жениха сначала не будет гармонировать с голосами обеих невест или в звучании сопрано и контральто обнаружится диссонанс. В подобных случаях природа распорядилась так, чтобы с каждым еженедельным Хором голоса трех влюбленных обретали все более гармоничное звучание. Каждая проба голоса, каждый вновь обнаруженный диссонанс почти незаметно вынуждает менее совершенного певца изменять тембр и громкость своего голоса так, чтобы его звучание становилось более гармоничным. Но вот после многих проб и длительного совершенствования голосов желанный результат достигнут. Наконец настает день, когда под пение обычного Брачного Хора, доносящегося из всех уголков безбрежной Лайнландии, трое влюбленных, разделенных огромными расстояниями, внезапно обнаруживают в звучании своих голосов совершеннейшую гармонию и, прежде чем они успевают что-либо осознать, брачное трио вокально воспаряет в двойных объятиях, а природа ликует, празднуя заключение еще одного брачного союза и появление трех новых живых существ.

14. О ТОМ, КАК Я ТЩЕТНО ПЫТАЛСЯ ОБЪЯСНИТЬ ПРИРОДУ ФЛАТЛАНДИИ

Полагая, что настала пора пробудить монарха от его восторженных грез и низвести его до уровня здравого смысла, я решил приоткрыть перед ним некоторые стороны истины, то есть поведать ему о положении вещей во Флатландии. Начал я так:

— Как ваше королевское величество отличает форму и положение своих подданных? Прежде чем вторгнуться в ваши владения, я с помощью зрения заметил, что одни лайнландцы имеют вид Прямолинейных Отрезков, дру-

гие по виду напоминают Точки, что часть Отрезков длиннее, часть — короче...

— Ты говоришь совершенно невероятные вещи,— прервал меня король.— Тебе, должно быть, почудилось. Ведь по самой природе вещей, как всем известно, обнаружить при помощи зрения различие между Отрезками прямой и Точкой невозможно. Это различие удастся обнаружить лишь при помощи слуха. Тот же слух позволяет точно установить и форму моего тела. Взгляни на меня. Я — Отрезок, самый длинный во всей Лайнландии. Мое тело занимает около шести дюймов Пространства...

— В длину,— отважился я на наводящее замечание.

— Глупости,— ответил король.— Пространство и есть не что иное, как Длина. Попробуй только прервать меня еще хоть раз, и я вообще не стану больше с тобой разговаривать.

Я поспешно принес свои извинения, но монарх продолжал насмешливым тоном:

— Поскольку ты упорно не желаешь признавать никаких доводов, тебе предоставляется возможность собственными ушами услышать, как я, пользуясь двумя своими голосами, сообщу точнейшие сведения о форме своего тела моим женам, одна из которых в данный момент находится на расстоянии в шесть тысяч миль семьдесят ярдов два фута и восемь дюймов к северу отсюда, а другая — на таком же расстоянии к югу. Слушай же, я обращаюсь к своим женам.

Король издал короткое чириканье и затем самодовольно пояснил:

— Мои жены, услышав в этот миг звук одного из моих голосов и вслед за ним — звук другого моего голоса, поймут, что второй звук достиг их с запозданием, равным тому времени, которое требуется звуку, чтобы преодолеть расстояние в 6,457 дюйма. Отсюда они заключают, что один из моих ртов удален от них на 6,457 дюйма дальше, чем другой, и, следовательно, мое тело имеет форму Отрезка длиной в 6,457 дюйма. Но ты, конечно, понимаешь, что мои жены не занимаются подобными вычислениями всякий раз, когда услышат мой голос. Они проделали все выкладки раз и навсегда до того, как мы заключили брачный союз, хотя и могли бы проделывать их всякий раз заново. Точно так же я могу

по звуку оценить форму любого из моих подданных мужчин.

— А как быть, если кто-нибудь из мужчин вздумает одним из своих голосов подражать женскому голосу,— спросил я,— или исказит свой южный голос так, что его нельзя будет отличить от эха его северного голоса? Разве такие хитрости не могут явиться источником серьезных недоразумений? Не располагаете ли вы какими-нибудь средствами, позволяющими уличать обманщиков такого рода? Например, не могли бы вы повелеть вашим подданным ощупать друг друга?

Разумеется, мой вопрос был очень глуп, ибо отличить на ощупь честного человека от мошенника невозможно, но я задал его лишь для того, чтобы вывести монарха из равновесия, и вполне преуспел в своем намерении.

— Смысл твоих слов мне не вполне ясен,— в ужасе воскликнул король.— Что означает «ощупать»?

— Ощупать, коснуться, дотронуться,— пояснил я.

— Если, говоря об ощупывании,— сказал король,— ты имеешь в виду такое сближение двух индивидуумов, при котором между ними не остается свободного места, то знай же, чужестранец, что в моих владениях подобное преступление карается смертной казнью. Причина столь строгой меры очевидна. Женщину, чьи хрупкие формы могут пострадать при столь тесном сближении, должно охранять государство, а поскольку по виду женщины неотличимы от мужчин, то закон в равной мере запрещает и мужчинам, и женщинам приближаться друг к другу так, чтобы расстояние между тем, кто приближается, и тем, к кому приближаются, сокращалось до нуля.

Действительно, зачем нужен столь незаконный и противоестественный процесс, который ты называешь прикосновением, если все его цели с большей легкостью и точностью достигаются при помощи слуха? Что же касается опасности мошенничества, о которой ты упомянул, то ее просто не существует, ибо голос, выражающий внутреннюю сущность лайнландца, никто не в силах изменить по своему желанию. Но допустим даже, что я наделен способностью проникать сквозь твердые предметы и мог бы пройти сквозь моих подданных, минуя их одного за другим, будь их хоть миллиард, и проверить

на ощупь размеры каждого из них и расстояние до него. Сколько времени и энергии было бы потеряно напрасно при столь неуклюжем и неточном способе! Ныне стоит мне лишь прислушаться, как я получаю все данные подробнейшей переписи и статистику о местоположении, телесном, духовном и умственном состоянии любого живого существа в Лайнландии. Нужно лишь прислушаться!

Произнеся эту речь, король замолчал и словно в экстазе прислушался к звукам, которые на мой вкус были ничуть не лучше легкого стрекота бесчисленного множества лилипутских кузнечиков.

— Да, — ответил я, — ваш чуткий слух служит вам хорошую службу и избавляет от многих неприятностей. Но позвольте мне все же заметить, что жизнь в Лайнландии должна быть невыносимо скучна. Не видеть ничего, кроме Точки! Не иметь даже возможности созерцать Прямую! Да что созерцать — сознать, что такое Прямая! Обладать зрением и быть лишенным линейной перспективы, которая ниспослана нам, обитателям Флатландии! Да лучше вообще лишиться зрения, чем видеть так мало! Смею уверить вас, что мой слух не обладает остротой вашего, ибо концерт, исполняемый всеми обитателями Лайнландии и доставляющий вам глубокое наслаждение, звучит для меня лишь как многоголосое щебетанье или чириканье. Но я по крайней мере могу зрительно отличить Отрезок прямой от Точки. Позвольте мне доказать это. Перед тем как вторгнуться в ваше королевство, я видел, что вы танцевали, двигаясь сначала слева направо, затем справа налево, причем слева в непосредственной близости от вас находились семь мужчин и одна женщина, а справа восемь мужчин и две женщины. Разве это не верно?

— Верно, если говорить о числе моих ближайших соседей и их поле, — заметил король, — хотя мне не ясно, что ты имеешь в виду, говоря о соседях «справа» и «слева». Но я решительно отмечаю твое утверждение о том, будто ты видел их. Как ты мог видеть Отрезок прямой, то есть заглянуть внутрь мужчины? Должно быть, ты обо всем этом слышал где-то раньше, а теперь тебе показалось, будто ты видел все воочию. Позволь мне спросить: что, собственно, означают твои слова «слева» и «справа»? Насколько я понимаю, ты вкладыва-

ваешь в них тот же смысл, какой имеем в виду мы, когда говорим «к северу» и «к югу».

— Вы заблуждаетесь,— возразил я.— Двигаться можно не только к северу и к югу, но и в другом направлении. Его-то я и называю направлением справа налево.

Король. Я был бы очень признателен тебе, если бы ты продемонстрировал мне, как движутся слева направо.

Я. К сожалению, это невозможно. Чтобы увидеть движение слева направо, вам пришлось бы выйти за пределы вашей Прямой.

Король. Выйти за пределы Прямой? Ты хочешь сказать «за пределы Вселенной»? За пределы Пространства?

Я. Ну да. За пределы *вашей* Вселенной. За пределы *вашего* пространства. Ведь ваше пространство нельзя считать истинным Пространством. Истинное Пространство—это Плоскость, а ваше Пространство— всего лишь Прямая.

Король. Если ты не можешь наглядно, на собственном примере продемонстрировать мне движение слева направо, то хотя бы опиши его.

Я. Боюсь, что если вы не умеете различать правое и левое, то слова бессильны объяснить вам различие между тем и другим. Но я не допускаю мысли, будто вам неизвестно столь простое различие.

Король. Я не понимаю ни слова из того, что ты сказал.

Я. Увы! Как мне объяснить вам получше? Не случилось ли вам, двигаясь по прямой, задумываться над тем, что, обратив свой глаз в ту сторону, куда обращен ваш бок, вы могли бы двигаться в несколько ином направлении? Иначе говоря, не возникало ли у вас когда-нибудь желание, вместо того чтобы двигаться в направлении, указываемом одним из концов вашего тела, устремиться, так сказать, вбок?

Король. Никогда! Я не понимаю, что означают твои странные слова. Как может внутренность быть обращенной в какую-то сторону? Как может живое существо двигаться в сторону своей внутренности?

Я. Оставим спор. Поскольку слова бессильны помочь нам в выяснении истины, я попытаюсь доказать свою

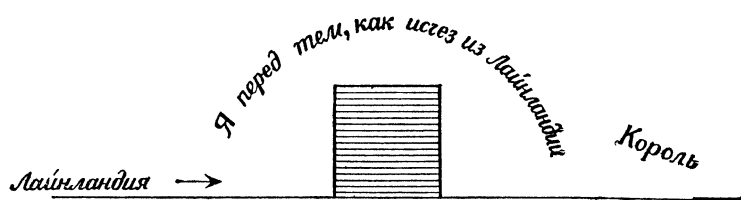
правоту делом и начну постепенно выходить из Лайнландии в том самом направлении, которое я жажду указать вам.

С этими словами я начал вытягивать свое тело из Лайнландии. Пока я частично оставался во владениях короля и был ему виден, он продолжал упрямо повторять:

— Я тебя вижу, я тебя вижу! Ты совсем не двигаешься.

Но стоило мне наконец оторваться от Лайнландии, как король отчаянно закричал во весь голос:

— Оно исчезло, оно погибло!



Исчезновение Квадрата во время его спора с королем Лайнландии

— Я не умер,— возразил я в ответ.— Я просто нахожусь вне Лайнландии: то есть вне той Прямой, которую вы называете Пространством, в истинном Пространстве, где могу видеть все таким, как оно есть. В данный момент я вижу целиком ваш Отрезок, или бок, или внутренность, как вам нравится его называть. Я могу видеть также женщин и мужчин к северу и к югу от вас, могу пересчитать их, описать порядок, в котором они расположены, их величину и расстояния между любыми из них.

Проделав все обещанные действия (на что у меня ушло немало времени), я торжествующе воскликнул:

— Ну теперь-то вы наконец убедились?

И, вторгнувшись еще раз в Лайнландию, я занял ту же позицию, что и раньше.

Реакция монарха была очень странной:

— Если бы ты было разумным мужчиной (хотя, поскольку ты обладаешь лишь одним голосом, я ничуть не сомневаюсь в том, что ты принадлежишь не к мужскому, а к женскому полу), если бы у тебя была хоть капля

здорового смысла, ты бы прислушалось к доводам рассудка. Ты хочешь, чтобы я поверил, будто, помимо Прямой, в существовании которой меня убеждают мои чувства, существует другая Прямая и другое движение, отличное от ежедневно воспринимаемого моим рассудком. Когда же я прошу тебя описать словами или наглядно продемонстрировать при помощи движения эту «другую Прямую», то ты, вместо того чтобы двигаться, начинаешь показывать мне какие-то фокусы: то совсем исчезаешь из виду, то появляешься снова. А вместо того чтобы дать ясное описание своего нового Мира, ты просто общаешь мне число и размеры некоторых приближенных из моей свиты, хотя это известному любому ребенку в моей столице. Может ли что-нибудь быть более дерзким и противным здравому смыслу? Тебе остается либо признать свое безумие, либо покинуть мои владения.

Разъяренный упрямством короля и в особенности уязвленный его притворным неведением относительно моей принадлежности к сильному полу, я ответил ему, не слишком заботясь о выборе выражений:

— Глупец! Вы считаете себя венцом творения, в действительности же вы весьма далеки от совершенства и слабоумны. Вы делаете вид, будто обладаете зрением, но не способны различить ничего, кроме Точки! Вы кичитесь тем, что умозрительным путем вывели заключение о существовании Прямой, я же могу созерцать Прямые и выводить заключения о существовании Углов, Треугольников, Квадратов, Пятиугольников, Шестиугольников и даже Окружностей. К чему слова? Достаточно того, что я — завершение вашего несовершенного «я». Вы — Отрезок прямой, я же — Отрезок Отрезков, называемый в стране, где я живу, Квадратом. И даже я, стоящий над вами на неизмеримо более высокой ступени, ничтожен по сравнению с великими представителями благородных семейств Флатландии, откуда я снизошел к вам в тщетной надежде развеять тьму вашего невежества.

Услышав эти слова, король с угрожающим криком двинулся ко мне, по-видимому, с намерением пронзить меня по диагонали. В тот же миг мириады подданных повелителя Лайнландии издали воинственный клич. Мощь его все возрастала, пока наконец он не уподобился реву армии, состоящей из ста тысяч Равнобедренных

Треугольников, которой придана артиллерия Пятиугольников. Лишенный дара речи и недвижимый, я не мог вымолвить ни слова, не мог двинуться, чтобы предотвратить грозящее мне уничтожение. Шум все нарастал, король приближался... и тут я проснулся от звона колокольчика, сзывавшего моих домочадцев к завтраку и вернувшего меня от грез к флатландской действительности.

15. О НЕЗНАКОМЦЕ ИЗ ТРЕХМЕРИЯ

От снов я перейду к фактам.

Шел последний день 1999 года нашей эры. Мерный шум дождя давно уже возвестил о наступлении ночи. Я сидел¹ в обществе своей жены, размышляя над событиями прошлого и пытаюсь предугадать, что принесет нам грядущий год, грядущее столетие, грядущее тысячелетие.

Мои сыновья и двое осиротевших внуков разошлись по своим комнатам, и лишь жена осталась со мной, чтобы проводить старое тысячелетие и встретить новое.

Я был погружен в размышления, перебирая в уме слова, случайно сорвавшиеся с уст моего младшего внука, весьма многообещающего юного Шестиугольника с необычайно светлым умом и идеально правильными углами. Его дядюшки и я давали ему обычный практический урок по распознаванию фигур по внешнему виду. Мы то быстрее, то медленнее вращались вокруг своих центров, а Шестиугольник должен был определять, в каком положении относительно него мы находимся. Ответы внука были настолько удовлетворительными,

¹ В выражении «я сидел» отнюдь не следует вкладывать тот смысл, который вы обычно вкладываете в него у себя в Трехмерии. У нас, флатландцев, нет ног. Мы можем «сидеть» или «стоять» (в вашем смысле слова) ничуть не лучше, чем какая-нибудь камбала или морской язык.

Тем не менее мы хорошо распознаем различные состояния собранности или расслабленности, соответствующие вашим понятиям «лежать», «сидеть» и «стоять». Отчасти нам помогает то лицо, о котором идет речь: при большей собранности свечение краев его фигуры усиливается.

К сожалению, недостаток времени не позволяет мне более подробно остановиться на этой теме и тысяче других, родственных ей вопросов.

что мне пришлось поощрить его, подсказав несколько арифметических соображений, применимых к геометрии.

Взяв девять Квадратов, каждый со стороной в один дюйм, я составил из них один большой Квадрат со стороной в три дюйма и тем самым наглядно доказал своему маленькому внуку, что, хотя мы и не можем заглянуть внутрь Квадрата, это не мешает нам подсчитывать число квадратных дюймов, содержащихся в нем, простым возведением во вторую степень числа дюймов, укладываемых в его стороне.

— Так мы узнаем,— заключил я свои объяснения,— что 3^2 , или 9, выражает число квадратных дюймов, содержащихся в Квадрате со стороной в 3 дюйма.

Маленький Шестиугольник, немного поразмыслив над моими словами, спросил меня:

— Дедушка, ты учишь меня возводить числа не только во вторую, но и в третью степень. Мне кажется, что число 3^3 также должно иметь какой-то геометрический смысл. Что оно означает?

— Число 3^3 вообще не имеет никакого смысла, по крайней мере в геометрии, поскольку геометрия рассматривает лишь два измерения.

Затем я показал внуку, что Точка, пройдя прямолинейный путь длиной в 3 дюйма, описывает Отрезок прямой длиной в 3 дюйма, которому можно сопоставить число 3. Отрезок длиной в 3 дюйма, перемещаясь на 3 дюйма (и оставаясь при этом параллельным своему начальному положению), порождает Квадрат со стороной в 3 дюйма, которому можно сопоставить число 3^2 .

Тут мой внук, вновь возвращаясь к занимавшей его мысли, внезапно перебил меня, воскликнув:

— Пусть будет по-твоему. Но если Точка, пройдя 3 дюйма, описывает Отрезок прямой длиной в 3 дюйма и мы сопоставляем ему число 3, если Отрезок длиной в 3 дюйма, перемещаясь параллельно самому себе, замирает Квадрат со стороной в 3 дюйма и мы сопоставляем ему число 3^2 , то и Квадрат со стороной в 3 дюйма, двигаясь каким-то образом параллельно самому себе (хотя я не могу представить себе, как происходит это движение), должен описывать Нечто (хотя я и не понимаю, что это за Фигура), имеющее по 3 дюйма вдоль каждого измерения. Этому Нечто мы и должны сопоставить число 3^3 .

— Отправляйся-ка ты лучше спать, — сказал я, слегка задетый тем, что он прервал меня. — Чем меньше чепухи ты будешь болтать, чем больше ума-разума наберешься.

Внук, пристыженный, удалился, а я остался сидеть рядом с женой, пытаюсь окинуть единым взглядом события уходящего 1999 года, заглянуть в грядущий 2000-й год. Меня не покидали навязчивые мысли, навеянные болтовней моего смышленного Шестиугольника. В северной половине моих песочных часов, рассчитанных на измерение получасовых промежутков времени, оставалось лишь несколько песчинок. Очнувшись от овладевшей мной задумчивости, я в последний раз в старом тысячелетии перевернул песочные часы южной половиной к северу и при этом воскликнул:

— Мальчишка просто глуп!

В тот же миг я почувствовал, что в комнате кто-то есть, и даже ощутил озноб от пронизывающе холодного дыхания незнакомца.

— Мальчик совсем не глуп! — возразила моя жена. — И ты зря ругаешь своего собственного внука, нарушая тем самым правила его почитания.

Однако мне было не до нее. Я огляделся вокруг, но так ничего и не заметил. И все же меня не покидало ощущение, что в комнате кто-то есть, и я даже поежился от ледяного дуновения, донесшего до меня едва различимый шепот. Привстав, я оглянулся еще раз.

— В чем дело? — спросила моя жена. — Сквозняков у нас в доме нет. Что это ты все ищешь? Ведь вокруг нас ничего нет.

Вокруг действительно не было ничего, и я, успокоенный, снова сел, повторив еще раз:

— Мальчишка просто глуп, вот что я вам скажу! Число 3^3 не может иметь никакого геометрического смысла.

Едва смолкли мои слова, как чей-то голос отчетливо произнес:

— Мальчик вовсе не глуп, и число 3^3 имеет очевидный геометрический смысл.

Моя жена услышала эти слова так же ясно, как и я сам, хотя она и не поняла их смысла. Мы оба вскочили и уставились в том направлении, откуда доносился голос. Каков же был наш ужас, когда прямо перед собой

мы увидели Фигуру! Сначала нам показалось, что это — женщина, стоящая к нам боком, но стоило мне присмотреться внимательнее, как я осознал свою ошибку: яркость спадала к краям Фигуры слишком быстро для того, чтобы она могла быть женщиной. Затем я подумал, что это Окружность, но таинственная Фигура на моих глазах меняла свои размеры совсем не так, как это делали Окружности или любые из известных мне Правильных фигур.

Моя жена не обладала ни моим опытом, ни хладнокровием, необходимым для того, чтобы заметить эти особенности Фигуры. С поспешностью и непоследовательностью, свойственными ее полу, она тотчас же заключила, что неизвестная женщина проникла к нам в дом через какое-нибудь отверстие в стене.

— Откуда здесь эта персона? — воскликнула она вне себя от ревности. — Ты же обещал мне, милый, что в нашем новом доме не будет вентиляторов.

— Их и нет, — подтвердил я. — Почему ты думаешь, будто незнакомец — женщина? Насколько я осведомлен в распознавании по внешнему виду, перед нами...

— Мое терпение когда-нибудь лопнет из-за твоего распознавания по внешнему виду, — прервала меня жена и привела две поговорки, бывшие в ходу у представительниц слабого пола во Флатландии: «Ощупать — значит поверить» и «Лучше коснуться Отрезка прямой, чем взглянуть на Окружность».

— Хорошо, пусть будет по-твоему, — согласился я, опасаясь вызвать ее раздражение. — Но коль скоро ты хочешь ощупать незнакомца, необходимо сначала представиться ему.

С самым любезным видом моя жена направилась к Незнакомцу:

— Мадам, позвольте мне ощупать вас и быть ошупанной...

И, внезапно отпрянув, воскликнула:

— Да это не женщина! У Фигуры вообще нет углов, ни малейшего признака хотя бы одного угла! Неужели я вела себя столь непочтительно с совершенной Окружностью?

— В известном смысле меня действительно можно считать Окружностью, — раздался голос, — причем более совершенной, чем любая другая Окружность во всей

Флатландии. Однако, строго говоря, я представляю собой множество Окружностей, образующих единое целое.

Затем голос мягко добавил:

— Мадам! Прошу извинить, но у меня имеется важное сообщение для вашего мужа, которое я не имею права передать в вашем присутствии. Если бы вы были так любезны и оставили нас на несколько минут...

Но моя жена не дослушала просьбу, которой вынуждена была затруднять себя совершеннейшая из Окружностей. Заверив нашего августейшего гостя в том, что ей давно уже пора покинуть нас, моя жена, рассыпаясь в извинениях за свое недавнее поведение, наконец удалилась в свои покои.

Я взглянул на песочные часы. Последние песчинки упали. Наступило второе тысячелетие.

16. О ТОМ, КАК НЕЗНАКОМЕЦ ТЩЕТНО ПЫТАЛСЯ НА СЛОВАХ ОБЪЯСНИТЬ МНЕ ТАЙНЫ ТРЕХМЕРИЯ

Как только предупреждающие возгласы, издаваемые моей женой, стихли в отдалении, я стал приближаться к Незнакомцу, намереваясь получше рассмотреть его и предложить ему сесть. Однако наружность Незнакомца настолько поразила меня, что я лишился дара речи и остановился как вкопанный. Не имея ни малейших признаков углов, Незнакомец непостижимым образом ежесекундно менял как размеры, так и яркость, не походя при этом ни на одну из известных мне фигур. У меня мелькнула мысль: а что если передо мной взломщик или грабитель, какой-нибудь выродок из Неправильных Равнобедренных Треугольников, который, подражая голосу Окружности, сумел проникнуть в дом и теперь готовится пронзить меня острым углом при своей вершине?

Отсутствие тумана в гостиной (конец года выдался на редкость засушливым) мешало мне удостовериться в своей догадке с помощью распознавания по внешнему виду, в особенности со столь близкого расстояния, на котором я находился от Незнакомца. Вне себя от страха я бесцеремонно бросился вперед и со словами «Прошу,

простить меня, сударь, но...» ощупал его. Моя жена была права. У Фигуры и в помине не было углов. Контур ее был лишен даже малейших неровностей или несоразмерностей. Никогда в жизни я не встречал более совершенной Окружности! Незнакомец стоял неподвижно, ожидая, пока я обойду его. Я описал вокруг него полный круг, начав с глаза и вернувшись к нему же. Незнакомец со всех сторон был круглым. Идеальная, совершенная Окружность без малейшего изъяна — в этом не оставалось никаких сомнений. Затем последовал диалог, который я постараюсь передать по памяти как можно более точно, опустив лишь мои пространственные извинения. Я весь пылал от стыда и унижения при мысли, что я, Квадрат, виновен в столь чудовищном нарушении приличий, как ощупывание Окружности. Диалог открыл Незнакомец, которому наскучила несколько затянувшаяся церемония представления.

Незнакомец. Не слишком ли вы увлеклись ощупыванием? Разве вам все еще трудно понять, кто ваш собеседник?

Я. Ваша светлость! Прошу простить мне мою неловкость, проистекающую не от незнания приличий, а лишь от того удивления и растерянности, которое вызвало ваше неожиданное появление. Умоляю вас никому не рассказывать о допущенном мной грубом промахе, в особенности моей жене. Но прежде чем ваша милость перейдет к прочим темам, не сообразовали ли вы удовлетворить любопытство того, кто с радостью хотел бы узнать, откуда прибыл его Гость?

Незнакомец. Из Пространства, сударь, из Пространства. Откуда же еще?

Я. Прошу простить, ваша светлость, но разве вы не находитесь в Пространстве в данный момент, вы и ваш покорный слуга?

Незнакомец. А что вы, собственно говоря, знаете о Пространстве? Дайте определение Пространства.

Я. Пространство, ваша светлость,— это длина и ширина, продолженные до бесконечности.

Незнакомец. Я так и думал: вы не имеете ни малейшего представления о том, что такое Пространство. Вы мыслите только в двухмерном пространстве. Я же прибыл, дабы возвестить вам о трехмерном пространстве: ширине, длине и высоте.

Я. Ваша милость изволит шутить. Мы также говорим о длине и высоте, или о ширине и толщине, обозначая два измерения четырьмя названиями.

Незнакомец. Но я имею в виду не только три названия, но и три измерения.

Я. Не могли бы вы, ваша милость, указать или объяснить мне, в каком направлении простирается неизвестное мне третье измерение?

Незнакомец. Я прибыл к вам из третьего измерения. Оно простирается вверх и вниз.

Я. Ваша светлость, по-видимому, хотела сказать к северу и к югу?

Незнакомец. Ничего подобного! Говоря о третьем измерении, я имел в виду направление, в котором вы не можете взглянуть, потому что у вас нет глаз сбоку.

Я. Прошу прощения, ваша светлость, но достаточно даже беглого взгляда, чтобы ваша милость могла убедиться: там, где сходятся две мои стороны, у меня расположено великолепное око.

Незнакомец. Не спорю, но для того чтобы вы могли взглянуть в Пространство, вам необходимо иметь глаз, расположенный не на периметре, а на боку: на том месте, которое вы скорее всего назвали бы своей внутренностью. Мы в Трехмерии называем ее нашей стороной.

Я. Иметь глаз в своей внутренности! Глаз в собственном желудке! Ваша милость шутит.

Незнакомец. Я отнюдь не расположен шутить. Говорю вам, что я прибыл из Пространства, или, поскольку вы не понимаете, что означает Пространство, из Страны Трех Измерений, откуда я еще совсем недавно взирал на вашу Плоскость, именуемую вами истинным Пространством. Занимая столь выгодную позицию, я мог без труда заглянуть внутрь любого предмета, который вы называете объемным (то есть «ограниченным с четырех сторон»): в ваши дома, храмы, сундуки и сейфы, даже в ваши внутренности и желудки. Все было открыто моему взору!

Я. Ваша светлость, подобные утверждения легко высказать.

Незнакомец. Вы имеете в виду, что их трудно доказывать? Чтобы не быть голословным, постараюсь подкрепить свои слова вескими доводами.

Спускаясь к вам, я видел четырех ваших сыновей-Пятиугольников (каждый из них находился в своей комнате) и двух ваших внуков-Шестиугольников. Я видел, как ваш младший Шестиугольник сначала оставался вместе с вами, а затем удалился к себе в комнату, после чего вы с женой остались вдвоем. Я видел, как на кухне ужинают три Равнобедренных Треугольника из вашей прислуги, а мальчик-слуга моет посуду. Затем я спустился к вам. Каким образом, по-вашему, мне удалось проникнуть в дом?

Я. Наверное, через крышу.

Незнакомец. О нет! Крышу, как вам хорошо известно, недавно чинили. В ней нельзя найти ни одной дырочки, сквозь которую могла бы пролезть даже женщина. Я же говорю, что пришел к вам из Пространства. Разве вас не убедили те подробности, которые я сообщил вам о ваших детях и прислуге?

Я. Вашей милости, должно быть, известно, что подобные сведения о жизни домочадцев и укладе жизни вашего покорного слуги нетрудно получить, расспросив любого из соседей, в особенности если учесть те мощные средства для сбора информации, которые имеются в вашем распоряжении.

Незнакомец (про себя). Что же делать? Минутку! Кажется, мне пришла в голову удачная мысль. (*Обращается ко мне.*) Когда вы видите Отрезок прямой (например, вашу жену), чему, по-вашему, равна его размерность?

Я. Ваша милость обращается со мной так, будто я один из тех простолюдинов, которые, будучи не сведущими в математике, полагают, будто женщины действительно имеют вид Отрезков прямых и одномерны. Нет, ваша светлость! Мы, Квадраты, осведомлены гораздо лучше, и нам, как и вашей милости, известно, что женщины, хотя их и принято называть Отрезками прямых, в действительности, если воспользоваться научной терминологией, представляют собой чрезвычайно сплюснутые Параллелограммы, которые, как и все мы, двумерны, то есть обладают длиной и шириной (или толщиной).

Незнакомец. Но если Отрезок прямой видим, то это и означает, что он, помимо длины, обладает еще одной размерностью.

Я. Ваша светлость, как я только сообщил вам, наши женщины обладают не только длиной, но и шириной. Мы созерцаем их длину и по ней делаем заключения о ширине, которая, хотя и чрезвычайно мала, но все же поддается измерению.

Незнакомец. Вы не поняли меня. Я хотел сказать, что, видя женщину, вы должны (если оставить в стороне производимые вами умозаключения о ее ширине) видеть ее длину и еще одно измерение, называемое у нас в Трехмерии высотой, хотя последнее в вашей стране исчезающе мало. Если бы Отрезки прямых обладали только длиной и были лишены «высоты», то они не занимали бы места и были бы невидимы. Надеюсь, это вам известно?

Я. Должен признаться, ваша милость, что не понял ни слова из того, о чем вы говорите. Когда мы во Флатландии видим какую-то Линию, то мы видим, какова ее длина и как она светится. Если Линия перестает светиться, то она тем самым перестает существовать и, как вы изволили выразиться, занимать пространство. Могу ли я взять на себя смелость и предположить, что ваша милость называет способность Линии светиться размерностью и в тех случаях, когда мы говорим о яркости Линии, употребляет слово «высота»?

Незнакомец. Разумеется, нет! Под «высотой» я понимаю такое же измерение, как ваша длина. Единственное различие состоит в том, что «высоту» во Флатландии воспринять нелегко, поскольку она чрезвычайно мала.

Я. Ваша светлость, высказанное вами утверждение нетрудно проверить. Вы говорите, будто я обладаю третьим измерением, называемым вами «высотой»! Но каждое измерение — это определенное направление и определенные размеры.

Назовите мою «высоту» или хотя бы укажите мне направление, в котором она простирается, и я обращусь в вашу «веру». В противном случае, да простит мне ваша милость, у меня будут все основания не доверять вам.

Незнакомец (про себя). Я не могу сделать ни того, ни другого. Как мне убедить его? Простого, без прикрас, изложения фактов, подкрепляемого их наглядной демонстрацией, должно быть заведомо достаточно. (*Обращает-*

ся ко мне.) Милостивый государь! Прошу вас внимательно выслушать меня .

Вы живете на Плоскости. То, что вы называете Флатландией, как бы представляет собой огромную поверхность некоей жидкости. Вы и ваши соотечественники передвигаетесь, «плаваете» по этой поверхности, не имея возможности ни приподняться над ней, ни опуститься под нее.

Я не плоская Фигура, а объемное Тело. Вы называете меня Окружностью, но в действительности я не Окружность, а бесчисленное множество Окружностей различных размеров, от Точки до Окружности, достигающей тринадцати дюймов в диаметре, как бы сложенных вместе. Пересекаясь с вашей Плоскостью, я образую в сечении Фигуру, которую вы с полным основанием называете Окружностью. Ибо даже Сфера (так называют меня обитатели страны, в которой я живу), если у нее возникает необходимость предстать перед обитателями Флатландии, вынуждена принимать форму Окружности.

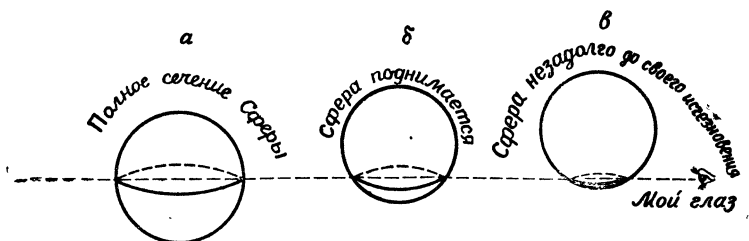
Разве вы не помните (для меня во Флатландии нет ничего тайного, все открыто моему взору, и прошлой ночью я без труда прочитал фантазмагорическое видение Лайнландии, запечатленное в вашем мозгу), разве вы запамятовали, говорю я, как, очутившись в Лайнландии, были вынуждены предстать перед ее королем не в виде Квадрата, а лишь в виде Отрезка? Размерность Линейного королевства недостаточно велика для того, чтобы оно могло вместить вас целиком. В Лайнландии умещался лишь небольшой срез, или сечение, вашего тела. Точно так же в вашей стране Двух измерений мне не хватает места, поскольку я — существо трехмерное. Лишь небольшой срез, или сечение, моего тела умещается во Флатландии. Его-то вы и называете Окружностью.

Судя по тому, как померкла яркость вашего глаза, вы мне не верите. Приготовьтесь же теперь воспринять убедительное доказательство истинности моих утверждений.

За один раз вы можете видеть лишь одно из моих сечений или Окружностей, поскольку не в состоянии оторвать свой взгляд от плоскости Флатландии. Но вы по крайней мере можете увидеть, как уменьшаются размеры моего сечения, когда я возношусь в Пространство,

Смотрите же — я поднимаюсь. Вы увидите, как моя Окружность будет уменьшаться в размерах до тех пор, пока не стянется в Точку и полностью не исчезнет.

Как я ни напрягал свое зрение, никакого «подъема» мне увидеть так и не удалось, но Незнакомец действительно стал уменьшаться в размерах, пока наконец совсем не исчез. Я несколько раз зажмурил и вновь открыл свой глаз, чтобы убедиться в том, что все происходящее мне снится. Но это был не сон. Из глубин Ниоткуда до меня донесся низкий голос (казалось, он раздается где-то рядом с моим сердцем): «Я полностью вышел из Флатландии? Теперь вы убедились? Смотрите внимательно: я медленно возвращаюсь во Флатландию, и вы увидите, как мое сечение будет постепенно увеличиваться».



Что увидел Квадрат, наблюдая за подъемом Сферы.

Каждый читатель, живущий в Трехмерии, легко поймет, что мой таинственный гость говорил со мной на языке истины и даже изрекал довольно простые утверждения. Но мне, хотя я и считался не последним математиком Флатландии, понять его было нелегко. Из приведенной на рисунке грубой схемы даже ребенку, обитающему в Трехмерии, ясно, что Сфера, поднимаясь в Пространство, в трех изображенных на схеме положениях казалась мне и должна была казаться любому флатландцу Окружностью (сначала — в полную величину (а), затем поменьше (б) и наконец очень маленькой (в), стягивающейся в Точку). Но для меня, хотя я и созерцал собственным глазом все происходящее, причины по-прежнему оставались покрытыми тьмой. Я мог постичь лишь то, что Окружность начала уменьшаться и исчезла, а затем вновь появилась и стала быстро увеличиваться в размерах.

Достигнув первоначальной величины, Незнакомец испустил глубокий вздох, ибо по моему молчанию он понял, что ему так и не удалось убедить меня. И действительно, я был склонен думать, что передо мной совсем не Окружность, а необычайно ловкий фокусник, или, если верить бабушкиным сказкам, колдун и чародей.

После долгого молчания Незнакомец пробормотал себе под нос: «Если не прибегать к насилию, то остается единственное средство: воспользоваться методом аналогии». Затем, помолчав еще какое-то время, Незнакомец продолжил наш диалог.

Сфера. Скажите мне, господин Математик: если Точка движется к северу, оставляя за собой светящийся след, то как вы назовете ее след?

Я. Отрезком прямой.

Сфера. А сколько концов у такого Отрезка?

Я. Два.

Сфера. Представьте себе, что Отрезок прямой, проходящей с юга на север, движется параллельно самому себе с востока на запад. Каждая Точка Отрезка оставляет за собой след, который имеет вид Отрезка прямой. Как вы назовете образовавшуюся при этом Фигуру? Для простоты предположим, что Отрезок переместился на расстояние, равное собственной длине. Как вы назовете образовавшуюся Фигуру, хотел бы я знать?

Я. Квадратом.

Сфера. А сколько у Квадрата сторон и углов?

Я. Четыре стороны и четыре угла.

Сфера. Напрягите слегка свое воображение и представьте себе Квадрат во Флатландии, который движется параллельно себе вверх.

Я. Как вы сказали? К северу?

Сфера. Нет, не к северу, а вверх, из Флатландии. Если бы Квадрат двигался в северном направлении, то его южные Точки должны были бы проходить по тем местам, где ранее находились его северные Точки. Я же имею в виду другое.

Я хочу сказать, что каждая ваша Точка (поскольку вы Квадрат и вполне подходите для моего примера), то есть каждая точка, принадлежащая той вашей части, которую вы называете своей внутренностью, должна двигаться сквозь Пространство вверх. Иначе говоря, вы

должны двигаться в таком направлении, чтобы ни одна Точка не занимала положения, которое ранее занимала другая ваша Точка, причем каждая Точка описывала бы Отрезок прямой. Тогда ваша аналогия с движением Отрезка, порождающим Квадрат, была бы полной. Должно быть, это вам ясно.

Сдерживая нетерпение (ибо я испытывал сильное искушение броситься на своего Гостя и вытолкнуть его в Пространство или куда угодно из Флатландии, лишь бы наконец избавиться от него), я ответил:

— Что представляет собой Фигура, которую я описал бы, двигаясь в направлении, называемом вами направлением «вверх»? Не могли бы вы описать ее на языке Флатландии?

Сфера. Разумеется, мог бы. Такое описание совсем не сложно и находится в полном соответствии с проводимой мной аналогией. Замечу лишь, что часть Пространства, описанную вашими Точками, следует называть не Фигурой, а Телом.

Итак, я опишу вам это Тело, точнее говоря, не я, а аналогия.

Мы начали с рассмотрения Точки. Поскольку Точка не содержит других точек, кроме себя, то число концов (конечных Точек) у нее, как нетрудно видеть, равно 1. Таким образом, у Точки есть лишь одна конечная Точка:

Точка порождает Отрезок прямой, имеющий две конечные Точки.

Отрезок прямой порождает Квадрат, обладающий четырьмя конечными Точками (вершинами).

Попытайтесь теперь сами ответить на свой вопрос. Числа 1, 2, 4 образуют геометрическую прогрессию. Каков ее следующий член?

Я. Он равен 8.

Сфера. Совершенно верно. Итак, Квадрат порождает Нечто, не имеющее названия на языке флатландцев. Это Нечто мы называем Кубом. Число вершин у Куба равно восьми. Теперь вам ясно?

Я. Есть ли у Существа, именуемого вами Кубом, стороны, углы или то, что вы называете «конечными Точками»?

Сфера. Разумеется, есть, причем в полном соответствии с аналогией. Кстати сказать, говоря о сторонах Куба, необходимо иметь в виду, что речь идет о сторонах,

понимаемых не в вашем, флатландском, а в нашем, трехмерном, смысле. Вы бы назвали эти стороны объемными.

Я. Сколько таких объемных сторон имеется у Существа, именуемого вами Кубом, которое я описал бы, двигаясь «вверх» своей внутренностью?

Сфера. Как вам не стыдно задавать мне такой вопрос? Вы же математик! Сторона чего угодно всегда имеет размерность, которая на единицу меньше размерности этого, если можно так выразиться, Чего угодно. Следовательно, поскольку Точка обладает наименьшей размерностью, то у Точки 0 «сторон». Отрезок прямой имеет 2 «стороны» (разумеется, конечные Точки Отрезка можно назвать сторонами лишь из вежливости), Квадрат — 4 стороны. Итак, мы получаем числа 0, 2, 4. Как вы назовете образуемую ими прогрессию?

Я. Арифметической.

Сфера. А чему равен ее следующий член?

Я. Шести.

Сфера. Совершенно верно. Итак, вы сами ответили на свой вопрос. Куб, который бы вы породили, двигаясь вверх параллельно самому себе, ограничен шестью сторонами, то есть шестью вашими внутренностями. Теперь вам все стало ясно?

— Чудовище! — воскликнул я. — Будь ты презренный фокусник, колдун, чародей, наваждение или дьявол, я не стану более терпеть твои насмешки. Один из нас — либо ты, либо я — должен погибнуть.

С этими словами я бросился на Незнакомца.

**17. О ТОМ, КАК СФЕРА,
УБЕДИВШИСЬ В ТЩЕТНОСТИ
ВСЕХ СВОИХ ОБЪЯСНЕНИЙ,
ПЕРЕШЛА ОТ СЛОВ К ДЕЙСТВИЮ**

Все было напрасно! Я что было сил ударил Незнакомца своим самым твердым углом. Такого удара с лихвой хватило бы, чтобы уничтожить любую обычную Окружность, но я почувствовал, как Незнакомец медленно и неуловимо ускользает от соприкосновения со мной. Он не пытался уклониться ни вправо, ни влево, а двигался куда-то прочь из нашего мира, пока наконец не исчез полностью. Я оглянулся и увидел, что вокруг

никого нет. Но голос Незнакомца слышался по-прежнему.

— Почему вы отказываетесь внять доводам рассудка? А я-то надеялся найти в вас, разумном и к тому же образованном математике, апостола для проповеди Трехмерия, в чьи тайны мне дозволено посвящать лишь раз в тысячелетие. Теперь я пребываю в растерянности и не знаю, как мне убедить вас. Впрочем, кажется, мне пришла в голову удачная идея. Деяния, а не слова провозгласят истину! Внемлите же, друг мой!

Я уже говорил вам, что, находясь в Пространстве, могу заглядывать внутрь любых предметов, которые вам кажутся замкнутыми. Например, я вижу в том шкафу, у которого вы стоите, несколько ящиков, набитых деньгами (точнее говоря, я вижу предметы, которые у вас принято называть ящиками; как и все прочие предметы во Флатландии, ящики не имеют ни дна, ни крышки). Я вижу также в этих ящиках два счета. Мне ничего не стоит проникнуть в ваш шкаф и достать из него один из счетов. Полчаса назад я видел, как вы заперли шкаф, и знаю, что ключ находится у вас. Я проникну в шкаф из Пространства. Дверцы его, как вы видите, остаются закрытыми. Вот я залез в шкаф и беру счет. Взял. Теперь снова возвращаюсь в Пространство, прихватив счет с собой.

Я бросился к шкафу и рывком распахнул его дверцы. Один из счетов исчез! С издевательским смешком Незнакомец появился в другом углу комнаты, и одновременно на полу появился счет. Я поднял его. Сомнений быть не могло: это был тот самый счет, который исчез из запертого ящика моего шкафа!

Я застал от ужаса. Мне казалось, что я схожу с ума. Между тем Незнакомец продолжал:

— Теперь вы не можете не признать, что именно мое объяснение наилучшим образом согласуется с фактами. Предметы, которые у вас принято называть объемными, в действительности являются плоскими. Ваше Пространство есть не что иное, как бесконечно протяженная Плоскость. Я же нахожусь в истинном Пространстве и могу заглядывать сверху внутрь любых предметов, которые вы можете разглядывать лишь снаружи. Вы могли бы покинуть свою Плоскость, если бы кто-нибудь извне приложил к вам необходимые усилия. Слегка

приподнявшись над вашей Плоскостью или слегка опустившись под нее, вы смогли бы увидеть все, что вижу я.

Чем выше я поднимаюсь, чем дальше я удаляюсь от вашей Плоскости, тем больше мне видно, хотя в поле моего зрения находится лишь небольшая часть Плоскости. Например, сейчас я поднимаюсь над Плоскостью. Я вижу вашего соседа, Шестиугольника, и членов его семьи, которые разошлись по своим комнатам. Вот я поднялся еще выше и вижу через десять домов от вас Театр, из которого расходятся зрители, а по другую сторону от вашего дома — Окружность, сидящую в кабинете над книгами. Теперь я снова возвращаюсь к вам. В качестве решающего довода позвольте мне коснуться вас. Надеюсь, вы не будете возражать против легчайшего прикосновения и позвольте мне дотронуться до вашего желудка? Я не нанесу вам серьезного ущерба, а легкая боль, которую вы, быть может, ощутите, не идет ни в какое сравнение с выгодой, извлекаемой из этого прикосновения вашим умом.

Прежде чем я успел вымолвить хотя бы слово протеста, я ощутил резкую боль в желудке и услышал демонический смех, раздавшийся, как мне показалось, где-то внутри меня. Через мгновение резкий приступ прекратился, оставив после себя лишь тупую, ноющую боль, а Незнакомец вновь появился, все увеличиваясь в размерах, со словами:

— Надеюсь, вам было не слишком больно? Если и это вас не убедило, то я не знаю, чем еще вас можно убедить. Что вы скажете теперь?

Моя решимость была поколеблена. Мысль о том, что я должен терпеть визиты непрошеного гостя, проделывающего дурацкие трюки с моим желудком, казалась невыносимой. Если бы мне только удалось каким-нибудь образом пришпилить его к стене и продержат так до тех пор, пока не подоспеет помощь!

И я снова бросился на Незнакомца, направив на него свой самый твердый угол и одновременно крича изо всех сил: «На помощь! На помощь!» Подвергшись столь неожиданному нападению, Незнакомец, по-видимому, провалился сквозь Плоскость и никак не мог подняться. Во всяком случае, пока я с удвоенной энергией прижимался к нему своей твердой вершиной, прислушиваясь, не спешит ли кто-нибудь ко мне на помощь, о ко-

торой я, не переставая, взывал, Незнакомец оставался недвижимым.

Затем по Сфере пробежала судорога.

— Нет,— слышалось мне,— это невозможно! Либо я заставлю его внять доводам рассудка, либо мне придется прибегнуть к крайней мере.

Затем, обращаясь ко мне, Незнакомец несколько громче торопливо воскликнул:

— Ни одна душа не должна знать о том, что стало известно вам. отошлите назад вашу жену, не дожидаясь, пока она войдет сюда. Учение о Трехмерии не должна постичь столь жалкая судьба. Плоды, зревшие тысячелетия, не следует отбрасывать. Я слышу, как приближается ваша жена. Прочь! Назад! Прочь от меня или вам придется отправиться вместе со мной в Страну Трех Измерений!

— Глупец! Безумец! Неправильная фигура! — закричал я.— Я и не подумаю отпустить тебя. Тебе придется понести наказание за все твои непотребные деяния.

— Ха-ха-ха! Так ты так? — громовым голосом проревел Незнакомец.— Пеняй на себя, сейчас ты распростишься со своей Плоскостью! Раз, два, три! Готово!

18. О ТОМ, КАК Я ОЧУТИЛСЯ В ТРЕХМЕРИИ И ЧТО Я ТАМ УВИДЕЛ

Непередаваемый ужас охватил меня. Сначала вокруг было темно. Затем забрезжил свет. Я ощущал его, но это ощущение не походило на обычное ощущение, которое возникает, когда что-нибудь рассматриваешь. Я увидел Отрезок, который не был Отрезком, Пространство, которое не было Пространством. Я был самим собой и в то же время каким-то другим. Когда ко мне вновь вернулся дар речи, я громко закричал из последних сил:

— Это либо бред сумасшедшего, либо ад!

— Ни то и ни другое,— спокойно ответил мне голос Сферы.— Это — Знание, это Трехмерие. Отверзни свой глаз и попробуй осмотреться спокойно.

Я огляделся и узрел новый мир! Передо мной находилось осязаемое, наглядное воплощение той самой красоты Круглого, о которой я строил столько умозаключе-

ний, догадок, гипотез, так мечтал. То что, по-видимому, было центром тела Незнакомца, лежало открытым перед моим взором. Я не видел ни сердца, ни легких, ни артерий, лишь гармоничное Нечто. В моем родном языке для него нет слов, но вы, мои дорогие читатели из Трехмерия, называете это Нечто поверхностью Сферы.

Мысленно распростершись перед моим Проводником в Пространстве, я воскликнул:

— Каким образом, о божественный идеал соразмерной красоты и мудрости, я вижу твою внутренность и не могу узреть ни сердца, ни легких, ни артерий, ни печени?

— Вам только кажется, будто вы видите мою внутренность,—ответила Сфера,— в действительности же вы ее не видите. Ни вам, ни другим существам не дано созерцать мои внутренние органы. Я существо совсем иного, высшего ранга, чем обитатели Флатландии. Если бы я была Окружностью, то вы могли бы без труда увидеть все, что находится во мне, но, как вам уже известно, я существо, составленное из бесчисленного множества Окружностей и называемое в нашей стране Сферой. Я — Многое в Одном. Взглянув на Куб извне, вы видите Квадрат, взглянув извне на Сферу — Окружность.

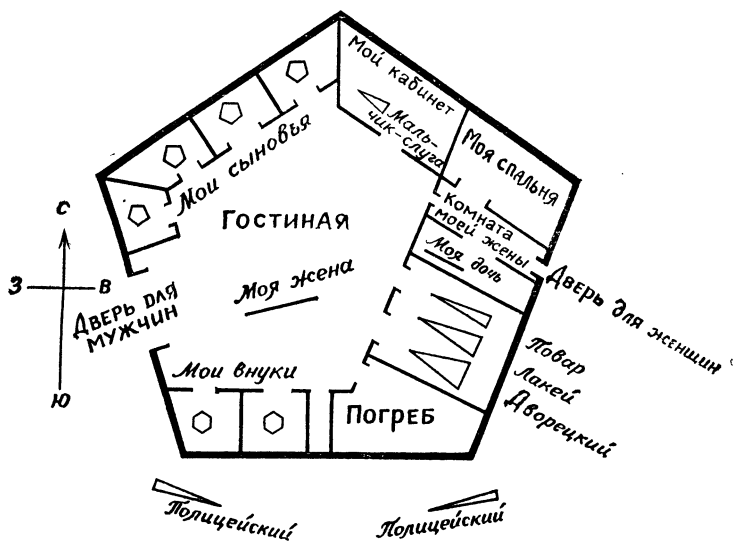
Хотя я и был потрясен загадочными утверждениями моего Наставника, я не стал более противиться его поучениям и лишь молча восхищался мудрыми речами. Голос его несколько смягчился, когда он сказал:

— Не печальтесь, если вы не сможете сразу постичь более глубокие тайны Трехмерия. Постепенно они откроются перед вами. Для начала же бросим взгляд назад, на ту область Пространства, откуда вы пришли. Вернемся на миг со мной на просторы Флатландии, и я покажу вам то, о чем вы так часто рассуждали и размышляли, но что оставалось скрытым от вашего взгляда: угол между двумя Прямыми.

— Но это же невозможно! — пытался было возразить я, однако Сфера, не слушая меня, устремилась вперед. Словно во сне, я последовал за ней и двигался до тех пор, пока ее голос не остановил меня:

— Взгляните туда, и вы увидите ваш собственный пятиугольный дом и всех его обитателей.

Посмотрев вниз, я собственным глазом увидел всех своих домочадцев, о которых ранее мог строить лишь умозаключения. Сколь бедными и призрачными оказались мои умозрительные построения по сравнению с реальностью, открывшейся моему взору! Четверо моих сыновей мирно почивали в северо-западных покоях моего дома, а двое сироток-внуков — в южных. Спали в своих



Вид на дом Квадрата из Трехмерия.

комнатах слуги, дворецкий, моя дочь. Только моя верная жена, обеспокоенная затянувшимся отсутствием мужа, покинув свою комнату, бродила по гостиной, с беспокойством ожидая моего возвращения. Мальчик-слуга, разбуженный моими криками, также вышел из своей комнаты и под предлогом, будто он хочет удостовериться, не лежу ли я где-нибудь в обмороке, пробрался ко мне в кабинет и рылся там в шкафу. Обо всем этом мне не нужно было строить никаких умозаключений: я все видел собственным глазом. Когда мы приблизились, я смог различить даже содержимое ящиков в моем шкафу и, в частности, рассмотрел два ящика с деньгами и счета, о которых упоминала в разговоре со мной Сфера.

Тронутый беспокойством жены, я хотел было спрыгнуть к ней, чтобы успокоить, но почувствовал, что не в силах двинуться.

— Не беспокойтесь о своей жене,— сказал мой Провожатый, — ей недолго придется оставаться в неведении. Продолжим лучше обзор Флатландии.

Я почувствовал, что снова поднимаюсь в Пространство. Все было именно так, как говорила мне раньше Сфера. Чем дальше мы удалялись от рассматриваемого предмета, тем больше расширялось поле зрения. Мой родной город, внутренность каждого дома и каждый обитатель в его стенах лежали передо мной и были доступны созерцанию. Мы поднялись еще выше, и — о чудо! — тайны земли, глубины шахт и глубокие пещеры открылись нашему взору.

Потрясенный зрелищем сокровенных тайн земли, открывшихся моему недостойному глазу, я сказал своему спутнику:

— Я стал как бы богом. Ведь говорят же мудрецы во Флатландии, что способность все видеть или, как они выражаются, быть всевидящим присуща лишь богу.

В голосе моего наставника слышались насмешливые нотки, когда он заметил в ответ:

— Так ли это на самом деле? У нас в Трехмерии найдется немало карманных воров и убийц, которых ваши мудрецы приняли бы за богов: каждый из них, взглянув на Флатландию, увидел бы не меньше, чем вы сейчас. Поверьте мне, ваши мудрецы глубоко заблуждаются.

Я. Разве всевидение присуще кому-нибудь, кроме богов?

Сфера. Не знаю. Но раз любой карманный воришка или убийца из Трехмерия может увидеть во Флатландии все и ничто не останется для него сокрытым, то ясно, что нет особых причин принимать вора или грабителя за бога. Может ли всевидение, как вы его называете (у нас в Трехмерии это слово является общепринятым), сделать вас более справедливым, более милосердным, снисходительным, более эгоистичным или более любящим? Отнюдь нет! Каким же образом всевидение может сделать вас более божественным?

Я. «Более милосердным, более любящим!» Но ведь милосердие и любовь — понятия, придуманные специ-

ально для женщины! Нам известно, что Окружность — высшее существо по сравнению с Отрезком прямой, поскольку знания и мудрость следует ценить выше, чем любовь и привязанность.

Сфера. Не берусь судить о том, какие свойства натуры надлежит считать более, а какие менее достойными. Замечу лишь, что лучшие и мудрейшие из мужей в Трехмерии о любви и привязанности помышляют больше, чем о постижении глубоких истин, а о презираемых вами Отрезках прямых — больше, чем о столь почитаемых у вас Окружностях. Но довольно об этом. Взгляните-ка лучше туда. Видите вон то здание?

Я взглянул в указанном направлении и увидел вдали величественное здание в форме Пятиугольника, в котором без труда узнал дворец Генеральной Ассамблеи всех государств Флатландии. Вокруг дворца плотными рядами (я сразу же догадался, что это были улицы), пересекавшимися друг с другом под прямыми углами, располагались пятиугольные здания поменьше. Я понял, что мы приближаемся к столице Флатландии — великому Метрополису.

— Здесь мы и спустимся, — заявил мой Провожатый.

Было раннее утро. Шел первый час первого дня двухтысячного года нашей эры. Действуя по обычаю в строгом соответствии с прецедентом, высшие Окружности Флатландии направлялись на торжественное заседание. Таким же торжественным заседанием был отмечен первый час первого дня тысячного года и первый час первого дня нулевого года.

Протоколы предыдущих заседаний на сей раз зачитывала Фигура, в которой я сразу узнал моего брата — абсолютно симметричного Квадрата, занимавшего пост Главного Секретаря Высшего Совета. В протоколах двух предыдущих торжественных заседаний отмечалось: «Различные злоумышленники, делающие вид, будто им удалось снестись с иным миром, и даже осмеливающиеся проповедовать мнимые доказательства его существования, а тем самым вводить в соблазн и себя, и других, неоднократно возмущали спокойствие в государствах Флатландии. Посему высокий Совет единодушно постановляет: в первый день каждого тысячелетия направлять префектам области Флатландии специальные предписания, дабы они со всей строгостью учиняли розыск

таких злоумышленников и своей властью, минуя формальное математическое исследование, подвергали их уничтожению, буде они Равнобедренные Треугольники с любым углом при вершине, наказанию плетью и заключению в тюрьму, буде они Равносторонние Треугольники, отправке в приют для умалишенных, буде они Квадраты или Пятиугольники. В случае, если злоумышленник окажется особой высокого ранга, то префекту надлежит препроводить его под стражей в столицу, дабы тот был подвергнут исследованию и предстал перед Высшим Советом».

— Вы слышите голос своей судьбы, — обратилась ко мне Сфера, пока Совет в третий раз формально принимал резолюцию. — Смерть или тюремное заключение ожидает апостола учения о Трехмерии.

— Вы ошибаетесь, — ответил я, — сейчас суть учения представляется мне настолько ясной, природа реального пространства настолько осязаемой, что и малый ребенок, как мне кажется, мог бы без труда постичь их. Позвольте мне на миг спуститься во Флатландию и просветить наших государственных мужей.

— Ты сделаешь это позже, когда настанет время, — сказал мой Проводник, — а пока я должен выполнить свою миссию. Оставайся на своем месте.

С этими словами он с величайшим проворством нырнул в «море» Флатландии, оказавшись как раз посреди не зала, где собрались члены Совета. «Я пришел, дабы возвестить вам о том, что существует Страна Трех Измерений!» — закричал он.

Сверху мне было хорошо видно, как более молодые члены Совета в ужасе отпрянули, когда перед ними начало расширяться круговое сечение Сферы. Но по знаку председательствующей Окружности, не проявившей ни малейшего признака тревоги или удивления, шесть Равнобедренных Треугольников Низшего типа с шести сторон бросились на Сферу.

— Попался! — вопили они. — Есть! Нет! Не уйдешь! Уходит! Ушел!

— Господа! — обратился председательствующий к молодым Окружностям. — Для удивления нет ни малейших оснований. В секретных архивах, к которым лишь я имею доступ, содержатся сведения об аналогич-

ных событиях, разыгравшихся в начале двух прошлых тысячелетий. Надеюсь, что вне стен дворца вы не станете упоминать о столь незначительном происшествии.

Возвысив голос, Верховная Окружность вызвала стражу:

— Арестуйте полицейских, заставьте их молчать. Ваши обязанности вам известны.

Покончив с несчастными полицейскими, невольно оказавшимися посвященными в государственную тайну, знать которую им не полагалось по рангу, Верховная Окружность вновь обратилась к членам Высшего Совета:

— Господа! Высший Совет завершил свою работу. Мне остается лишь поздравить вас с наступлением Нового года и пожелать всяческого благополучия.

Прежде чем покинуть зал заседаний, Верховная Окружность выразила, причем довольно пространно, свое искреннее сожаление Секретарю Совета, моему, превосходному, но — увы! — несчастнейшему брату: в связи с прецедентом в целях сохранения секретности он приговаривается к пожизненному тюремному заключению. С чувством глубокого удовлетворения Верховная Окружность добавила, что в случае, если мой брат никогда не станет упоминать о происшествии на торжественном заседании, ему гарантируется жизнь.

**19. О ТОМ, КАК СФЕРА
ПОКАЗАЛА МНЕ НОВЫЕ ТАЙНЫ ТРЕХМЕРИЯ,
А Я ЖАЖДАЛ УЗНАТЬ ЕЩЕ БОЛЬШЕ,
И ЧТО ИЗ ЭТОГО ВЫШЛО**

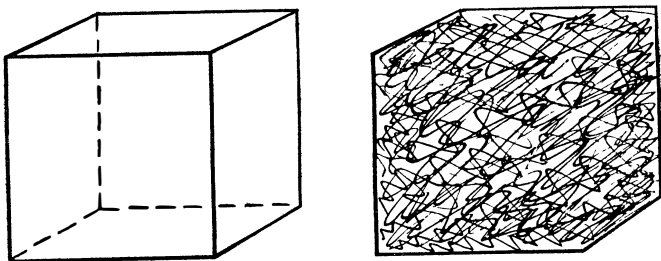
Увидев, как моего несчастного брата уводят в тюрьму, я попытался проникнуть в зал заседаний Высшего Совета, чтобы попросить Верховную Окружность о помиловании или хотя бы попрощаться с братом, но обнаружил, что совершенно не могу двигаться по своему усмотрению. Я всецело зависел от воли моего провожатого, который угрюмо заметил:

— Забудь пока о брате. Недалек тот час, когда у тебя будет достаточно времени, чтобы скорбеть вместе с ним. А пока следуй за мной.

Мы снова вознеслись в Пространство.

— До сих пор я не успела показать тебе ничего, кроме Плоских Фигур и их внутренностей, — сказала

Сфера. — Теперь я должна представить тебя пространственным Телам и раскрыть тебе план, по которому они построены. Взгляни на эти подвижные квадратные пластинки. Смотри, я водружаю одну пластинку на другую, но не так, как вы ожидаете: я располагаю одну пластинку не к северу от другой, а помещаю ее на другую пластинку. Затем я беру еще одну пластинку, приставляю к ней третью. Видите? Я строю пространственное Тело из Квадратов, расположенных так, что они попарно параллельны друг другу. Вот теперь Тело полностью достроено.



Куб и неправильная плоская фигура, привидевшаяся Квадрату.

но. Оно имеет одинаковые размеры в высоту, в длину и в ширину. Мы называем его Кубом.

— Прошу прощения, ваша светлость,— возразил я,— но моему глазу построенное вами Тело представляется неправильной Фигурой, внутренность которой доступна созерцанию. Иначе говоря, мне кажется, будто я вижу не пространственное тело, а плоскую Фигуру — такую, о форме которых нам приходится строить умозаключения у себя во Флатландии. При этом она обладает Неправильностью, свойственной лишь некоторым особо жестоким преступникам, в силу чего один лишь вид Фигуры неприятно поражает мое зрение.

— Правильно,— согласилась Сфера.— Построенная мной Фигура кажется вам плоской, потому что вы не привыкли к светотени и перспективе: во Флатландии Шестиугольник покажется Отрезком прямой каждому, кто не знаком с искусством распознавания по внешнему виду. Но в действительности перед вами пространственное Тело, в чем вы легко можете убедиться, осязав его.

Затем Сфера представила меня Кубу, и я понял, что

это восхитительное существо — не плоская Фигура, а пространственное Тело. Куб наделен шестью плоскими сторонами (их в Трехмерии называют гранями) и шестью конечными точками (называемыми вершинами трехгранных углов). Я вспомнил слова Сферы о том, что Квадрат, двигаясь в Пространстве параллельно самому себе, порождает Куб, и мне стало приятно при мысли о том, что столь незначительное создание, как я, в известном смысле можно считать прародителем столь великолепного потомка.

Смысл сказанного моим Наставником относительно «светотени» и «перспективы» не был мне понятен, и я не колеблясь, поделился с ним своими затруднениями.

Если бы я вздумал приводить здесь объяснения Сферы, то, сколь бы сухими и точными они ни были, обитатели Пространства сочли бы их излишними. Скажу лишь, что своими ясными ответами, изменив относительное расположение предметов и источников света, а также позволив мне ощупать несколько предметов и даже свою священную особу, Сфера помогла мне полностью понять смысл ее слов и научиться с легкостью отличать Окружность от Сферы, а плоскую Фигуру от пространственного Тела.

Эти незабываемые мгновения были кульминацией, раем моей странной, насыщенной событиями истории. Все последующее — повесть о моем злосчастном падении, печальном, но незаслуженном! Неужели жажда знаний возникает лишь для того, чтобы обречь того, кто ее испытывает, на разочарование и кары? С большой неохотой берусь я за нелегкую задачу воссоздания картины своих унижений. И все же, подобно второму Прометею, я пойду на это и на более тяжкие муки, если мне удастся зажечь в душах обитателей Плоскости или трехмерного человечества дух протеста против самонадеянности, ограничивающей размерность нашего Пространства двойкой, тройкой или любым другим числом, за исключением бесконечности. Долой все личные соображения!

Но позвольте мне продолжить мое повествование так же, как я начал его: без отступлений, не забегаая вперед, строго придерживаясь беспристрастного изложения событий. Я приведу точные факты, точные слова, будто огнем пылающие в моем мозгу, не меняя их ни на

йоту. Пусть же мои читатели рассудят меня с провидением.

Сфера охотно продолжала бы свои объяснения, посвящая меня во все подробности строения правильных Тел, Цилиндров, Конусов, Пирамид, Пяти- и Шестигранных Призм, Сфер, но я набрался смелости и прервал своего Наставника.

— Прошу прощения,— сказал я,— о ты, которого мне не следует впредь именовать Совершеннейшей Красотой! Позволь твоему недостойному слуге обратиться к тебе с просьбой: окажи мне любезность и покажи свою внутренность.

Сфера. Что? Мою...

Я. Твою внутренность: желудок и все прочие внутренние органы.

Сфера. Чем вызвана эта неуместная дерзкая просьба? И что вы имеете в виду, когда говорите, будто впредь вам не следует называть меня Совершеннейшей Красотой?

Я. Ваша светлость! Вы своей мудростью сами научили меня, как можно представить себе Нечто еще более величественное, более прекрасное и в еще большей мере приближающееся к Совершенству, чем вы. Подобно тому как вы превосходите все Фигуры, населяющие Флатландию, объединяя множество Окружностей в единое целое, должно существовать Нечто, объединяющее в себе множество Сфер в одну высшую сущность, превосходящую по своему совершенству все Тела, обитающие в Трехмерии. Мы, находясь сейчас в Пространстве,зираем на Флатландию сверху и свободно заглядываем внутрь всех предметов. Точно так же должна существовать некая более возвышенная, более чистая область, куда ты несомненно намеревался отправиться вместе со мной, о ты, кого я всегда, во всех измерениях буду называть моим Жрецом, Философом и Другом!

Находясь в этом более пространственном Пространстве, поднявшись до еще одной размерной Размерности, со своей наблюдательной площадки мы сможем бросить взгляд на то, что скрыто внутри объемных Тел. Твоя собственная внутренность, так же как и внутренности родственных тебе Сфер, откроется взору бедного изгнанника из Флатландии, которому выпала честь быть посвященным во многие тайны.

Сфера. Что за чепуха! Оставим глупые шутки! У нас мало времени, а многое еще предстоит сделать, прежде чем вас можно будет по праву назвать апостолом Трехмерия и вы понесете свет истины своим слепым невежественным соотечественникам во Флатландию.

Я. Любезный Наставник, не лишай меня того, что не составляет для тебя ни малейшего труда. Разреши мне лишь один раз взглянуть на твою внутренность, и я буду удовлетворен навсегда и стану твоим послушным учеником, твоим рабом, с готовностью следующим всем твоим наставлениям и питающимся словами, которые срываются с твоих уст.

Сфера. Дабы удовлетворить вас и принудить к молчанию, позвольте мне заявить вам прямо и без прикрас, что я охотно удовлетворила бы ваше желание, если бы это было в моих силах. Но я не могу выполнить вашу просьбу. Ведь не станете же вы настаивать на том, чтобы я вывернула свой желудок наизнанку, дабы вы могли удовлетворить свою любознательность?

Я. Но, взяв меня с собой в Страну Трех Измерений, ваша светлость показала мне внутренности моих соотечественников в Стране Двух Измерений. Что может быть легче, чем взять своего покорного слугу во второе путешествие в благословенную область Четвертого Измерения, откуда я мог бы вместе с его светлостью бросить взгляд на Страну Трех Измерений и увидеть все, что скрыто внутри любого трехмерного дома, постигнуть тайны трехмерной земли, познать сокровища шахт и рудников Трехмерия и внутренности любого трехмерного живого существа, в том числе внутренности благородных и почитаемых Сфер?

Сфера. Но где находится эта Страна Четырех Измерений?

Я. Не знаю, но моему высокочтимому Наставнику это должно быть известно.

Сфера. Мне ничего не известно. Такой страны нет. Сама мысль о том, что она существует, лишена всякого смысла.

Я. Ваша светлость, мысль о существовании Четырехмерного Мира не кажется лишенной смысла мне и в еще меньшей степени должна казаться абсурдной моему Наставнику. Я не теряю надежды, что даже здесь, в Стране Трех Измерений, искусство вашей светлости преодо-

леет все преграды и сделает Четвертое Измерение видимым для меня, подобно тому как в Стране Двух Измерений искусство моего Просветителя открыло глаз его слепого слуги на незримое присутствие Третьего Измерения, хотя мне так и не удалось увидеть это Измерение из Флатландии.

Позвольте мне напомнить события недавнего прошлого. Вы же сами учили меня там, внизу, что когда я вижу Отрезок прямой и, произведя умозаключения, отождествляю его с плоской Фигурой, то в действительности я созерцаю не известное мне Третье Измерение, отличное от яркости фигуры и называемое «высотой»? Разве не следует из ваших рассуждений, что когда я здесь, наверху, вижу плоскую Фигуру и, произведя необходимые умозаключения, отождествляю ее с пространственным Телом, то в действительности я созерцаю некое неизвестное Четвертое Измерение, отличное от цвета, но тем не менее реально существующее, хотя размеры Тела вдоль Четвертого Измерения чрезвычайно малы и ускользают от измерения?

Кроме того, в существовании Четвертого Измерения нас убеждает аналогия между Фигурами.

Сфера. Аналогия! Что за чушь? Какая аналогия?

Я. Ваша светлость умышленно искушает своего покорного слугу, дабы проверить, хорошо ли тот усвоил сообщенные ему новые сведения. Не насмехайтесь надо мной, ваша милость! Я жажду новых знаний и мечтаю вкусить их. Не спорю, сейчас мы не можем видеть Пространство с более высокой размерностью, поскольку в желудках у нас нет глаз. Но вспомним о жалком, крохотном монархе Лайнландии: Флатландия существовала, хотя правитель одномерного мира не мог повернуться ни вправо, ни влево, чтобы взглянуть на нее. Вспомним, как близко, совсем рядом, была Страна Трех Измерений, как она соприкасалась с моим периметром, и все же я, несчастный слепец, не имея глаза в желудке, не мог разглядеть ее. Поэтому я с уверенностью могу утверждать, что где-то рядом должна быть Страна Четырех измерений, которую мой Господин и Повелитель созерцает своим мысленным взором. Она должна существовать, так учил меня мой Наставник. Или он забыл все, о чем сам сообщил своему покорному слуге?

Не порождает ли в Одном измерении движущаяся Точка Отрезок прямой с двумя концами?

Не порождает ли в двух Измерениях движущийся Отрезок прямой Квадрат с четырьмя вершинами?

Не порождает ли в Трех Измерениях движущийся Квадрат благословенное существо (и не его ли я созерцаю в данный миг) — Куб с восемью вершинами?

Не должен ли в четырех Измерениях движущийся Куб, хотя бы во имя аналогии и торжества истины, не будет ли, спрашиваю я, движущийся божественный Куб порождать еще более божественную Структуру с шестнадцатью вершинами?

Взгляни на непогрешимое подтверждение ряда 2, 4, 8, 16... Разве это не геометрическая прогрессия? Разве новое число, да позволено мне процитировать собственные слова вашей милости, получено не «в строгом соответствии с аналогией»?

Не вы ли, ваша светлость, учили меня, что у Отрезка имеются две ограничивающие его Точки, у Квадрата — четыре ограничивающих его Стороны-Отрезка, а у Куба — шесть ограничивающих его Граней-Квадратов? Взгляните еще раз на подтверждающий ряд: 2, 4, 6... Разве это не арифметическая прогрессия? Не следует ли отсюда с необходимостью, что еще более божественный отпрыск божественного Куба в Стране Четырех Измерений должен быть ограничен 8 Кубами? Разве такой вывод получен не «в строгом соответствии с аналогией», как учила меня ваша милость?

О мой Повелитель! Взгляните: я всецело полагаюсь на гипотезу, не зная фактов. Умоляю вас: подтвердите или опровергните мои логические надежды. Если я допустил ошибку в своих рассуждениях, то охотно признаю ее и не стану более настаивать на Четвертом Измерении. Если же я прав, то пусть ваша светлость прислушается к доводам рассудка.

Я спрашиваю: случилось ли раньше или теперь вашим соотечественникам наблюдать, как потомки каких-то существ более высокого ранга проникали в запертые комнаты так же, как ваша милость проникла в мое жилище, — не открывая дверей или окон, появляясь и исчезая по собственному желанию? Я готов получить любой ответ на свой вопрос. Если он окажется отрицательным, я умолкаю.

Сфера (после продолжительного молчания). Такие случаи были. Но по поводу самих фактов мнения разделились. Точнее говоря, все факты установлены твердо и не вызывают сомнений, но их объясняют по-разному. Во всяком случае хотя число различных объяснений чрезвычайно велико, последовательной теории Четвертого Измерения никто еще не предложил. Поэтому прошу вас, оставьте этот вздор, нам давно пора заняться гораздо более важными делами.

Я. Я так и знал! Я был уверен, что мои ожидания сбудутся. Наберитесь же терпения и ответьте мне на еще один вопрос, о лучший из Учителей! Те, кто появлялся неизвестно откуда и возвращался неизвестно куда, тоже сжимали свои сечения и таинственным образом исчезали в более пространственном Пространстве, куда я уговариваю вас отвести и меня?

Сфера (угрюмо). Они исчезали, в этом нет никакого сомнения, если только вообще когда-нибудь появлялись. Но большинство моих соотечественников считают, что эти видения возникают лишь в мыслях от чрезмерного мозгового напряжения.

Я. Неужели они так говорят? Не верьте им! Или, если они действительно правы и неведомое другое Пространство существует лишь в воображении, перенесите меня в эту благословенную страну, где бы и я мог мысленно заглянуть внутрь всех пространственных предметов. Там перед моим восхищенным взором Куб, двигаясь в некотором совершенно новом направлении (в строгом соответствии с аналогией) так, что каждая точка из его внутренности, проходя новый тип Пространства, оставит за собой след, породит еще более совершенное Тело, чем он сам — с шестнадцатью сверхпространственными телесными углами при вершинах и восьмью Кубами, образующими Поверхность. Но спросим себя: прекратим ли мы свое восхождение по шкале Размерностей, достигнув Четырехмерия? Дойдя до Четырех Измерений, запнемся ли мы на пороге Пятого Измерения, переступим ли через него? О нет! Пусть лучше наши честолюбивые замыслы становятся все шире, по мере того как наше тело воспаряет все выше и выше. Тогда, уступая неудержимому порыву нашего разума, перед нами распахнутся двери Шестого Измерения, затем Седьмого, Восьмого и...

Трудно сказать, как долго продолжалась бы моя речь. Тщетно Сфера громовым голосом приказывала мне замолчать и грозила самыми суровыми карами за непослушание. Ничто не могло остановить экстатический поток моего вдохновения! Возможно, я заслуживаю порицания, но мозг мой был опьянен недавними глотками истины, сделанными мной с помощью самой Сферы. Печальный конец не заставил себя долго ждать. Слова мои были внезапно прерваны громким треском, раздававшимся снаружи и одновременно — внутри меня. Я почувствовал, что лечу сквозь Пространство со скоростью, от которой у меня захватило дух. Вниз! Вниз! Вниз! Я быстро падал, ясно сознавая, что обречен вернуться во Флатландию. Лишь взгляд, последний, незабываемый взгляд я успел бросить на унылую ровную пустыню, простиравшуюся перед моим глазом, которая вновь должна была стать моей Вселенной. Затем наступила кромешная тьма. Раздался заключительный раскат грома, заглушивший все прочие звуки. Я пришел в себя. Снова я был обыкновенным ползающим Квадратом, снова находился у себя в кабинете и прислушивался к предупреждающим возгласам, которые издавала, приближаясь, моя жена.

20. О ТОМ, КАК СФЕРА ПРИБОДРИЛА МЕНЯ В СНОВИДЕНИИ

Хотя на размышления у меня оставалось не более минуты, какое-то инстинктивное чувство подсказало мне, что жену не следует посвящать во все происшедшее. Не то чтобы меня в тот момент охватило предчувствие опасности, которая нависнет надо мной, если я разглашу свою тайну. Просто я доподлинно знал, что любой женщине во Флатландии рассказ о моих приключениях показался бы невероятным и бессмысленным. Поэтому я попытался отвлечь внимание моей жены какой-то наскоро придуманной историей о том, как я случайно провалился сквозь люк погреба и, оглушенный, долго лежал без чувств.

Притяжение к югу в наших краях столь незначительно, что любой женщине мой рассказ показался бы в высшей степени невероятным и неправдоподобным, но моя жена была наделена здравым смыслом в гораздо боль-

шей мере, чем другие представительницы слабого пола. К тому же она почувствовала, что я необычайно возбужден. Не вступая со мной в пререкания, жена с мягкой настойчивостью стала убеждать меня, что я утомился и нуждаюсь в отдыхе. Я был рад предложению удалиться к себе в кабинет, чтобы там спокойно поразмыслить над всем происшедшим. Оставшись один, я почувствовал, как меня неудержимо клонит ко сну. Но, прежде чем закрыть глаза, я попытался мысленно представить себе Третье Измерение и, в частности, проследить за тем, как при движении Квадрата возникает Куб. Мне это удалось, хотя и не столь отчетливо, как хотелось бы. Я твердо помнил, что Квадрат должен двигаться «вверх, а не к северу», и решил придерживаться этих слов как путеводной нити, которая непременно должна вывести к решению, стоит лишь крепко ухватиться за нее. Повторяя про себя, словно заклинание, слова «вверх, а не к северу», я крепко заснул.

И приснился мне сон. Я видел, будто снова парю в Пространстве вместе со Сферой, излучающей мягкое сияние, которое свидетельствует о том, что она сменила свой гнев на милость и не сердится более на меня. Мы движемся вместе к яркой едва различимой Точке, на которую обратил мое внимание Наставник. Когда мы приблизились к Точке, мне показалось, будто из нее исходит чуть слышный шум, напоминающий сильно ослабленные расстоянием пронзительные свистки полицейских у вас в Трехмерии. Шум этот был настолько слаб, что даже в абсолютной тишине вакуума, сквозь который мы совершали свой полет, нам удалось расслышать его лишь после того, как мы остановились на расстоянии около двадцати моих диагоналей от Точки.

— Взгляните туда,— сказал мой Проводник.— Во Флатландии вы живете. Лайнландию вы видели во сне. Вместе мы воспаряли в высоты Трехмерия. Чтобы изведенное вами обрело полноту и завершенность, я низведу вас на низшую ступень бытия: мы проникнем в пределы Пойнтландии, в Царство Нулевой Размерности.

Взгляните на несчастное создание, которое находится перед вами. Эта Точка — существо, подобное нам, но обреченное на вечное пребывание в пучине Нулевой Размерности. Для нее в ней самой заключен свой мир, своя Вселенная. Она не в силах представить себе никого,

кроме себя. Она не ведаёт ни длины, ни ширины, ни высоты, ибо эти понятия чужды всему, с чем ей когда-либо приходилось сталкиваться. Эта Точка не имеет ни малейшего представления ни о числе два, ни о том, что такое «много». Она сама воплощает для себя Единичное и Общее, будучи в действительности Ничем.

Извлеките же отсюда урок: быть самодовольным — значит быть гнусным и невежественным, стремиться к возвышенной цели лучше, чем слепо и бессильно погрязнуть в невежестве. А теперь прислушайтесь!

Сфера умолкла, и я услышал, что крохотное непрерывно жужжащее создание издает едва различимые монотонные, но все же отчетливые звуки, напоминающие звуки вашего фонографа. Я смог разобрать лишь слова:

— Неисчерпаемая красота бытия! Она! Она есть Она и только Она, ничего, кроме Нее.

— Кто эта таинственная Она, о которой вещает крохотная Точка? — спросил я.

— Наша Точка имеет в виду себя, — пояснила Сфера. — Разве вам не случалось замечать прежде, что малые дети и те, кто впадает в детство, неспособны отличать себя от внешнего мира, говорят о себе в третьем лице? Но тсс! Послушаем лучше, что говорит Точка.

— Она заполняет собой все Пространство, — продолжало свой монолог крохотное создание, — и существует лишь то, что Она заполняет собой. О том, о чем Она мыслит, Она вещает, а тому, что Она вещает, Она внимлет. Она воплощает в себе мыслителя, оратора и слушателя, мысль, слово и слух. Она — Единичное, и в то же время Все во Всем. О счастье, о радость бытия!

— Не могли бы вы вывести Точку из состояния самодовольства, в котором она пребывает? — спросил я. — Расскажите ей о том, что она в действительности представляет собой, как вы некогда рассказали мне, откройте ей всю ограниченность Пойнтландии, увлеките ее за собой в Пространство более высоких размерностей.

— Это нелегкая задача, — ответил мне мой Наставник. — Впрочем, не хотите ли попытать счастья сами?

Изо всех сил напрягая свой голос, я обратился к Точке со следующей речью:

— Умолкни, самодовольное существо, умолкни! Ты называешь себя Всем во Всем, но в действительности ты Ничто. Твоя так называемая Вселенная — не более чем

крохотное пятнышко на Прямой, а Прямая — не более чем тень по сравнению с...

— Тсс! Хватит! Того, что вы сказали, вполне достаточно,— прервала меня Сфера.— А теперь послушайте, какое действие возымела ваша речь на короля Пойнтландии.

Свечение монарха Пойнтландии, ставшее после моих слов ярче, чем прежде, ясно показывало, что чувство самодовольства не покинуло его. Стоило мне замолкнуть, как он вновь принялся за самовосхваления:

— О наслаждение, о радость мышления! Чего только Она не может превзойти силой своей мысли! Умозрительным путем Она дошла до мысли о своем ничтожестве, но и сама мысль об этом лишь увеличила меру Ее счастья! Минутная слабость рассеялась, уступив место торжеству! О божественная, созидающая сила Всего в Одном! О радость, безмерная радость бытия!

— Видите, — заметил мой Наставник, — сколь мало вы достигли своей речью. Все, что монарх Пойнтландии вообще в силах понять, он воспринимает как свои собственные мысли, ибо ему трудно представить, что на свете существует кто-нибудь еще, кроме него. Восприняв новые идеи, он принимается восхвалять «Ее» за гибкость и неисчерпаемое разнообразие мышления, усматривая в этом еще один пример Ее созидающей силы. Предоставим же этому богу Пойнтландии предаваться невежественной иллюзии его всеведения и вседесущности.

Пока мы, мягко покачиваясь,плыли в Пространстве назад, во Флатландию, я все время слышал мягкий голос моего Спутника, извлекавшего мораль из моего сновидения, поощрявшего меня на новые дерзания и наставлявшего учить дерзать других. Сначала, по собственному признанию Сферы, ее разгневало мое желание воспарить в Пространство более высокого числа измерений, чем три. Но по зрелом размышлении она обрела ясность мысли и, хотя гордость ее и была ущемлена, Сфера признала передо мной, ее учеником, свою ошибку. Затем Сфера стала посвящать меня в еще более глубокие тайны Пространства, чем те, в которые я проник ранее, показывать, как движение трехмерных Тел порождает четырехмерные Гипертела, а движение Гипертел — пятимерные Гипергипертела, причем все это «в

строгом соответствии с аналогией» и так просто и понятно, что все построения вполне доступны даже сознанию женщин.

21. О ТОМ, КАК Я ПЫТАЛСЯ ОБЪЯСНИТЬ ТЕОРИИ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА СВОЕМУ ВНУКУ И ЧТО ИЗ ЭТОГО ПОЛУЧИЛОСЬ

Я проснулся преисполненный радости и принялся размышлять о блестящей карьере, которая открывалась передо мной. Я выступлю, думалось мне, и сразу обращу в новую веру всю Флатландию. Истину о Трехмерном Пространстве следует нести всем, даже женщинам и солдатам. Начать проповедь нового учения я решил со своей жены.

Именно в тот момент, когда я обдумывал план своих действий, на улице послышалось множество голосов, требовавших тишины. Затем раздался более громкий голос. Это герольд доводил до сведения обитателей Флатландии какое-то важное сообщение. Внимательно прислушавшись, я узнал резолюцию Высшего Совета, грозившую арестом, тюремным заключением или смертной казнью каждому, кто станет возмущать умы флатландцев всяческими соблазнами и распространять слухи, будто ему удалось получить какие-либо вести из иного мира.

Я задумался. Опасность была нешуточной. Чтобы избежать ее, разумнее всего совсем не упоминать о моих контактах с представителями других миров, а вместо этого прибегнуть к наглядным демонстрациям, казавшимся мне делом весьма простым. Столь неопровержимые доказательства существования Трехмерного Пространства не оставят флатландцам иного выхода, кроме как отбросить старые заблуждения и обрести новую истину. «Вверх, а не к северу» — вот путеводная нить ко всему доказательству. Все казалось мне абсолютно ясным. Сон освежил меня и придал новые силы. Но странное дело: когда я проснулся, мой план казался мне простым, как арифметика, но почему-то перестал казаться самоочевидным. И хотя моя жена именно в этот момент вошла в комнату, я, обменявшись с ней несколькими ничего не значащими словами, решил не начинать с нее свою проповедь учения о Трехмерном Пространстве.

Мои Пятиугольные сыновья были людьми с хорошей

репутацией, видным положением и пользовались достаточно широкой известностью как врачи, но не были сильны в математике и поэтому не подходили для моей цели. Мне пришло в голову, что мой юный и смысленный Шестиугольник, обладавший склонностью к занятиям математикой, лучше всех других подошел бы для роли ученика. Почему бы в самом деле мне не начать свою проповедь с горячо любимого внука, чье случайное замечание о геометрическом смысле числа 3^3 удостоилось одобрения самой Сферы? Разъяснив ему, малолетнему мальчику, учение о Трехмерном Пространстве, я буду в абсолютной безопасности, ибо откуда ему знать о постановлении Высшего Совета? К тому же я не мог быть уверенным в том, что мои сыновья не выдали бы меня префекту, если бы узнали, что я всерьез разделяю бунтарскую ересь — учение о Третьем Измерении (столь велик был их патриотизм и столь явно преклонение перед мудростью Окружностей превосходило их привязанность к своему отцу).

Однако первое, что мне необходимо было сделать, — это удовлетворить каким-то образом любопытство своей жены. Ей, естественно, хотелось разузнать кое-что о причинах, по которым Окружность настаивала на беседе со мной, и о том, каким образом ей удалось пробраться к нам в дом. Не вдаваясь в подробности, я изложил жене несколько упрощенную схему событий. Боюсь, что мой отчет не был в столь хорошем согласии с истиной, как могли бы думать мои читатели из Трехмерия. Скажу лишь, что мне стоило немалых трудов убедить жену спокойно вернуться к исполнению ее хлопотливых домашних обязанностей, но зато ей так и не удалось вырвать у меня ни единого слова о Трехмерном Мире. Облегченно вздохнув, я тотчас же послал за своим внуком. Должен признаться, что моя поспешность имела веские основания: я почувствовал, что все виденное и слышанное мной странным образом начало ускользать от меня, подобно видениям полузабытого мучительного сна, и мне необходимо поупражнять свое пространственное воображение в беседах с моим первым учеником.

Когда внук вошел ко мне в кабинет, я тщательно запер за ним двери. Затем, сев рядом с ним, я достал листки с записями наших занятий по математике (вы бы

назвали эти листки отрезками) и объявил, что мы продолжим наш вчерашний урок. Я сразу объяснил внуку, что в одномерном случае Точка, двигаясь, описывает Отрезок прямой, а в двумерном случае движущийся параллельно самому себе Отрезок прямой замечает Квадрат. Затем, сделав вид, будто я не могу удержаться от смеха, я сказал:

— Ну, постреленок, вот мы и дошли до того места, на котором остановились вчера. Ты пытался убедить меня в том, что Квадрат, двигаясь в некотором направлении (условимся называть это направление «вверх, а не к северу»), порождает какую-то фигуру, нечто вроде Квадрата, но не в двумерном, а в трехмерном Пространстве. Повтори-ка то, о чем ты говорил вчера, еще раз!

В этот момент мы снова услышали на улице возгласы герольда «Слушайте, слушайте!», доведившего до всеобщего сведения постановление Высшего Совета. Мой внук, хотя он был еще очень юн, но не по возрасту развит и воспитан в духе беспрекословного повиновения авторитету Окружностей, воспринял создавшуюся ситуацию с остротой, оказавшейся для меня совершенно неожиданной. Он молчал до тех пор, пока не замерли последние слова Постановления, а затем разразился слезами.

— Милый дедушка! — сказал он. — Я просто пошутил и совсем не имел в виду ничего такого. Мы же вчера ничего не знали о новом законе! Мне кажется, что я ничего не говорил о Третьем Измерении. Я уверен, что ни слова не сказал о каком-то направлении «вверх, а не к северу».

Ведь это была бы страшная глупость, правда? Как может предмет двигаться вверх, а не на север? Вверх, а не на север! Да если бы я был малым ребенком, то и то не мог бы сказать такую глупость! Глупее не придумаешь! Ха-ха-ха!

— Это совсем не глупо, — возразил я, рассердившись. — Вот смотри! Я беру этот Квадрат.

С этими словами я схватил первый попавшийся мне под руку квадратик.

— Смотри! Я двигаю его — видишь? — не на север. Я двигаю его вверх, то есть не на север, а в каком-то

другом направлении. Не обязательно в том, в каком я показал, может быть, как-нибудь иначе..

Я умышленно закончил свой первый урок бессмысленной фразой и бесцельно подвигал квадратиком, что необычайно позабавило моего внука. Рассмеявшись гораздо громче обычного, он заявил, что я не учу его, а подшучиваю над ним. С этими словами внук отпер двери и выбежал из кабинета. Так закончилась моя первая попытка приобщить ученика к тайнам учения о Трехмерном Пространстве.

22. О ТОМ, КАК Я ПЫТАЛСЯ РАСПРОСТРАНЯТЬ УЧЕНИЕ О ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДРУГИМИ СРЕДСТВАМИ И ЧТО ИЗ ЭТОГО ВЫШЛО

После неудачи, постигшей меня с внуком, мне не очень хотелось делиться своей тайной с домашними. Но я не впал и в отчаяние. Единственный вывод, который я сделал для себя, состоял в том, что мне не следует всецело полагаться на интригующую фразу «Вверх, а не к северу», но скорее надлежит попытаться ясно и последовательно изложить для желающих все учение о Трехмерном Пространстве. Для этого, естественно, мне пришлось взяться за перо.

Несколько месяцев я провел в тиши своего кабинета, сочиняя трактат о тайнах Трехмерного Пространства. Дабы обойти закон, я всюду, где только возможно, говорил не о реальном Пространстве, а о некотором вымышленном мире, где Фигура могла, смотря на Флатландию сверху вниз, заглянуть внутрь любого предмета и где могла существовать Фигура, как бы окруженная со всех сторон шестью Квадратами и имеющая восемь вершин.

Работая над своим трактатом, я был немало раздрадован невозможностью вычерчивать геометрические фигуры в нужном мне виде: ведь во Флатландии я мог вычерчивать на Отрезках прямых лишь Отрезки прямых, отличавшиеся между собой лишь длиной и яркостью свечения. Поэтому когда я наконец закончил свой трактат (он назывался «От Флатландии до страны грез и мечтаний»), то у меня отнюдь не было уверенности в том, что его содержание будет доступно многим.

Между тем жизнь моя начала омрачаться. Я потерял вкус к развлечениям. Все зрелища превратились для меня в пытку. Меня так и подмывало сказать слова, за

которые полагалась самая суровая кара, поскольку я не мог не сравнивать то, что вижу в Двумерном Пространстве, с тем, что открылось моему взору в Трехмерном Пространстве, и едва удерживался, чтобы не проводить эти сравнения вслух. Я забросил все дела и всех своих клиентов и полностью отдался размышлениям над некогда виденными мной чудесами, о которых я не мог поведать никому и которые с каждым днем мне было все труднее воспроизводить перед моим мысленным взором.

Однажды (это было через одиннадцать месяцев после моего возвращения из Трехмерия) я попытался, закрыв глаз, представить себе Куб, но неудачно. И хотя со второй попытки мне удалось увидеть внутренним взором это восхитительное создание, я все же не был уверен в том, что полностью воссоздал оригинал (те же сомнения не оставляли меня и впоследствии). От этого овладевшая мной меланхолия еще больше усилилась, побуждая меня решиться на какой-нибудь шаг, но я не знал, что именно надлежит мне предпринять. Я бы охотно пожертвовал жизнью во имя истины, если бы был уверен, что тем самым смогу кого-нибудь убедить в своей правоте. Но если мне не удалось убедить даже собственного внука, то как я мог надеяться на то, что смогу убедить высшие и наиболее просвещенные во всей Флатландии Окружности?

И все же порой я был чрезмерно самонадеян и отваживался на довольно опасные высказывания. Меня уже считали если не изменником, то по крайней мере еретиком, и я отчетливо сознавал опасность своего положения. Тем не менее по временам мне бывало трудно удержаться от подозрительных или полузапретных высказываний даже в тех случаях, когда случалось находиться среди высших Многоугольников или Окружностей. Например, однажды, когда разговор зашел о том, как надлежит поступать с теми безумцами, которые утверждают, будто обладают способностью видеть внутренность вещей, я процитировал высказывание одной древней Окружности, утверждавшей, что большинство людей всегда считало безумцами пророков и открывателей новых истин. Я не мог удержаться от того, чтобы мимоходом не обронить такие выражения, как «глаз, который различает внутренность вещей» и «окинуть взглядом

всю страну». Раз или два у меня сорвались даже запрещенные слова «Третье и Четвертое Измерения». Наконец, в довершение целого ряда более мелких проступков на заседании нашего Местного Умозрительного Общества, происходившем во дворце самого префекта (на этом заседании некая весьма глупая личность прочитала пространный доклад, содержащий неопровержимые причины, по которым провидению было угодно ограничить размерность Пространства числом два, а всевидение сделать атрибутом лишь всемогущего бога), я настолько забылся, что во всех подробностях поведал во всеуслышанье о моем путешествии со Сферой через Пространство во Дворец заседаний в Метрополисе, а затем снова в Пространство, о моем возвращении домой и обо всем, что я увидел или услышал во время сновидения. Разумеется, сначала я делал вид, будто описываю воображаемые путешествия некоей вымышленной персоны, но затем я увлекся настолько, что, отбросив всякую маскировку, обратился ко всем присутствовавшим со страстным призывом отказаться от предрасудков и обратиться в новую веру — стать убежденными приверженцами учения о Трехмерном Пространстве.

Нужно ли говорить, что я тотчас же был арестован и отправлен в Высший Совет?

На следующее утро я стоял в том самом Дворце, где всего лишь несколько месяцев до того находился вместе со Сферой. Мне позволили начать и продолжить мое повествование, не задав ни единого вопроса и ни разу не прервав меня. Но я с самого начала предвидел свою судьбу, ибо председательствующий, заметив, что стражу несут отборные полицейские с углом при вершине в 55° , распорядился заменить их охраной из Равнобедренных Треугольников самого низшего класса с углом при вершине в $2-3^\circ$, причем отдал приказ, не дожидаясь, пока я начну свою защитительную речь. Что это означало, мне было слишком хорошо известно. Меня должны были либо казнить, либо заточить в тюрьму, а все, что я скажу, надлежало хранить в тайне от всего мира. Всех стражников, присутствовавших в зале и слышавших мою речь, также ожидала смертная казнь, и председательствующий распорядился заменить более дорогие жертвы жертвами подешевле.

После того как я, закончив речь, умолк, председательствующий, по-видимому почувствовав, что на некоторых из более молодых Окружностей моя искренность произвела сильное впечатление, задал мне два вопроса.

1. Не мог бы я указать то направление, которое имею в виду, когда произношу слова «вверх, а не к северу»?

2. Не мог бы я с помощью рисунков или описаний (а не простого перечисления воображаемых граней и вершин) более подробно объяснить, что представляет собой Фигура, которую я называю Кубом?

Я ответил, что не могу добавить к сказанному ни слова и полагаюсь на истину, которая в конце концов несомненно восторжествует.

Председательствующий заявил, что он полностью разделяет мои чувства и я вряд ли мог лучше справиться со стоявшей передо мной трудной задачей. По его мнению, меня следовало бы приговорить к пожизненному тюремному заключению, ибо если истине угодно, чтобы я вышел из узилища и занялся обращением мира в новую веру, то ей придется самой позаботиться о том, чтобы ее планам было суждено осуществиться. Пока же председательствующий считает возможным ограничиться взятием меня под стражу и не причинять мне иных неудобств, кроме тех, которые необходимы для того, чтобы исключить возможность моего побега. Если я сам дурным поведением не лишу себя привилегии, то мне время от времени будет разрешено свидание с братом, оказавшимся в тюрьме еще раньше, чем я.

С тех пор прошло семь лет, а я все еще томлюсь в темнице. Если не считать посещений брата, я полностью изолирован от всех людей и не вижу никого, кроме своих тюремщиков. Мой брат — один из лучших Квадратов, справедливый, разумный, жизнерадостный и не лишенный чувства братской привязанности. И все же я должен признаться, что мои еженедельные беседы с ним в одном отношении причиняют мне острейшую боль. Он присутствовал в зале заседаний, когда Сфера проникла туда, и видел ее изменяющиеся сечения. Он слышал объяснение этого явления, которое Сфера предложила тогда вниманию Окружностей. С тех пор на

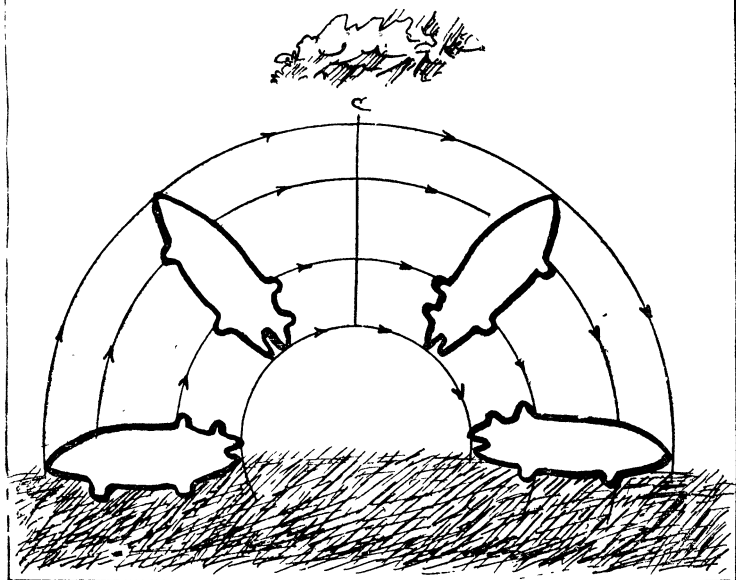
протяжении семи лет не проходит и недели, чтобы он вновь и вновь не слышал от меня рассказа о том, какую роль я играл в том достопамятном событии, а также подробное описание моих приключений в Трехмерии и вытекающие из аналогии аргументы, неопровержимо свидетельствующие о существовании Трехмерных предметов. И все же (я со стыдом вынужден признаться в этом) мой брат так и не постиг природу Третьего Измерения и открыто высказывает свое неверие в существование Сферы.

Таким образом, я лишен единомышленников и, насколько можно судить, не смог выполнить миссию провозвестника Третьего Измерения и донести до флатландцев истину, проникающую к нам лишь один раз в тысячелетие. Прометей в Трехмерии был осужден на вечные муки за то, что принес смертным небесный огонь. Я же, несчастный флатландский Прометей, брошен в темницу за то, что ничего не принес своим соотечественникам. И все же меня не покидает надежда, что мои записки каким-то не известным мне образом найдут дорогу к разуму обитателей в каком-то Измерении и положат начало поколению бунтарей, не признающих ограниченной Размерности.

Но такая надежда зарождается у меня лишь в моменты просветления. Увы! Разум мой ясен не всегда. По временам меня угнетает ужасная мысль о том, что, по правде говоря, я не могу уже точно припомнить форму некогда виденного мной Куба, по которому я так тоскую. В моих сновидениях загадочное правило «Вверх, а не к северу» посещает меня, подобно бездушному сфинксу. К мучениям, на которые я обрек себя во имя истины, следует прибавить и периоды умственной слабости, когда Кубы и Сферы становятся далекими, а само существование их сомнительным, когда Страна Трех Измерений чудится мне такой же призрачной, как и Страна Одного Измерения или Страна с числом измерений, равным нулю. Да, что и говорить, даже прочные стены, отделяющие меня от желанной свободы, страницы, на которых я пишу, и все вполне осязаемые реальности Флатландии кажутся мне порой плодом большого воображения или той бесплотной материей, из которой сотканы сновидения.

Дионис Бюргер
СФЕРЛАНДИЯ

Роман
об
искривленном пространстве
и расширяющейся Вселенной
с иллюстрациями автора,
Шестиугольника



КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание «Сферландии» разошлось за четыре месяца. Однако меня радует не только это, но и тот интерес, с которым широкие круги читателей, как видно из многочисленных писем, отнеслись к проблемам, затронутым в «Сферландии». Шестиугольник и доктор Пункто получили также письма от различных людей, укрывшихся за псевдонимами Равносторонний Треугольник и Обитатель Лайнландии. В одних письмах их авторы просили разъяснить непонятные места, в других содержались предложения относительно того, как улучшить книгу. Все это и побудило меня предпринять второе издание «Сферландии».

Хотя для доктора Пункто не составляло особого труда более подробно рассказать читателям о точности произведенных им измерений, мы решили, что широкой публике это вряд ли будет интересно. Вместе с тем мы хотели бы подчеркнуть, что при измерении космических расстояний по методу построения треугольников расширение пространства не успевает сказаться на результатах производимых измерений, поэтому длину базиса можно считать постоянной.

Многие читатели обратили мое внимание на то, что у флатландских деревьев нет стволов. Это действительно так. Деревья во Флатландии по своей форме отличаются от деревьев в Трехмерии. У них нет ни корней, ни ствола, ни листьев. Слово «ствол» в книге означает то же, что в Трехмерии принято называть «кроной». Выражение «поверхность моря» я по совету читателей заменил выражением «личия, отделяющая море от суши». Разумеется, и сейчас в тексте можно обнаружить не всегда последовательное словоупотребление. К сожалению, это неизбежно, ибо многие понятия, встречающиеся в трехмерном мире, попадая в двумерный мир, приобретают несколько иной оттенок.*

Я всегда признателен за любые критические замечания.

Шестиугольник

* Шестиугольник определяет конгруэнтные фигуры, считая первичным движение. При другом подходе мы называем конгруэнтными фигуры, совместимые не только при собственных движениях, но и при отражениях, и задаем их свойства аксиоматически. — *Прим. ред.*

ПРЕДИСЛОВИЕ, КОТОРОЕ МОЖНО И НЕ ЧИТАТЬ

Около семидесяти лет назад вышел в свет небольшой роман, который приобрел широкую популярность, и, хотя это произведение мало переиздавалось, название его до сих пор пользуется всеобщей известностью. Мы имеем в виду «Флатландию», роман, в котором в весьма своеобразной форме излагается понятие четвертого измерения.

Замысел этого произведения обладает выдающимися дидактическими достоинствами. Роман, в котором повествование ведется от лица одного из обитателей Флатландии — Квадрата, рассказывает о тех трудностях, с которыми столкнулся мнимый автор при попытке представить себе третье измерение. По аналогии читатель приходит к пониманию того, что такое четвертое измерение — измерение в направлении, перпендикулярном нашему трехмерному пространству.

Подлинным автором романа о Флатландии, который приобрел международную известность, был англичанин Эдвин Э. Эбботт. Он был не математиком, а необычайно одаренным и квалифицированным педагогом. Мистер Эбботт родился 20 декабря 1838 г., а в 1865 г. стал директором одной из лондонских школ. Помимо знаменитой «Флатландии», из-под его пера вышли школьные учебники, несколько теологических работ, биография Бэкона и «Шекспировская грамматика», которая также приобрела широкую известность. Умер Эдвин Э. Эбботт в 1926 г. в возрасте 87 лет.

Повествование в романе ведется в несколько старомодном духе. В привычном для наших предков неторопливом стиле нас посвящают в тайны Флатландии. Мы как бы оказываемся рядом с ее обитателями — плоскими геометрическими фигурами. «Флатландия» резко отличается от обычных научно-популярных книг не только беллетризованной формой изложения (роман!), но и замедленным темпом повествования, позволяющим непосвященному читателю разобраться в существе дела. В этом и состоит неоценимая находка автора «Флатландии», сделавшая его книгу уникальным явлением в литературе. Герберт Уэллс написал множество рассказов, основанных на использовании тех или иных научных данных, но его рассказы менее всего преследуют познавательную цель и чтение их отнюдь нельзя рассматривать как приобщение к науке. Еще раньше мы могли бы назвать Жюль Верна, в сочинениях которого читатель действительно может почерпнуть научные сведения, однако приводимые им факты служат лишь развитию фабулы и не преследуют высоких целей просвещения.

«Флатландия» знакомит читателя с понятием четвертого измерения, но не позволяет ему заглянуть дальше. Читатель узнает лишь о том, что можно мысленно представить себе четвертое направление, перпендикулярное любым трем взаимно перпендикулярным направлениям в нашем мире. Во времена, когда Эбботт создавал свою «Флатландию», большинство людей считало, что четвертое измерение представляет собой не более чем научную («геометрическую») фантазию. Разумеется, и тогда Эбботт мог бы пойти дальше и использовать в своем романе зачатки неевклидовой геометрии, но он благоразумно ограничился рассмотрением лишь традиционной евклидовой геометрии, поскольку всякое отклонение от нее тогда считалось своего рода забавой геометров. Ныне все знают, что наше пространство устроено не так про-

сто, как полагали на протяжении многих веков. Наше пространство искривлено в недоступном нашему непосредственному восприятию направлении и, что еще более странно, расширяется. Читателю, которому случилось хоть раз держать в руках любую книжку, посвященную проблемам пространства, несомненно знакомо все это. Поэтому ныне мы не можем довольствоваться одной лишь «Флатландией».

Популярные книги, призванные помочь читателю разобраться в этих интересных проблемах, имеются в достаточном числе, но их изложение доступно не всем. Темп, в котором эти книги вводят читателя в существо проблем, слишком высок, поэтому автор данной книги решил последовать примеру Эбботта и изложить сведения об искривленном пространстве и расширяющейся Вселенной в форме романа.

Вместо того чтобы населять плоский мир совершенно новыми существами, автор счел за благо обратиться к хорошо известной Флатландии. Поэтому, прежде чем приступать к чтению «Сферландии», необходимо ознакомиться с «Флатландией» Эбботта.

Относительно содержания «Сферландии», пожалуй, уместно сделать несколько замечаний. Автор полагает, что его персонажи обладают большим сходством с «землянами», чем обитатели эбботтовской Флатландии. Разумеется, следует иметь в виду, что автор поневоле вынужден был ограничить свой роман довольно жесткими рамками. По замыслу автора, читатель должен извлечь из знакомства со «Сферландией» представление о том, что пространство может быть искривлено и может расширяться. Говоря об искривленном мире, автор ограничился рассмотрением лишь поверхности сферы и оставил в стороне все остальные типы искривленных пространств. Ни словом не упомянул он о положительной и отрицательной кривизне и о том, как мы

представляем себе структуру реального пространства — того пространства, в котором мы живем.

Разумеется, о теории относительности также можно было бы рассказать в форме романа, но автор побоялся выйти за пределы своей компетентности. Не следует в одной книге затрагивать слишком много тем. Темп повествования в «Сферландии» по самой природе вещей гораздо выше, чем во «Флатландии».

Если знакомство с этой книгой доставит читателю хотя бы небольшую часть того удовольствия, которое испытал автор при ее создании, появление «Сферландии» можно будет считать полностью оправданным.

Роттердам, 1957 г.

Д. Бюргер

ЧАСТЬ I

ПЛОСКИЙ МИР

1. НОВЫЕ ВРЕМЕНА

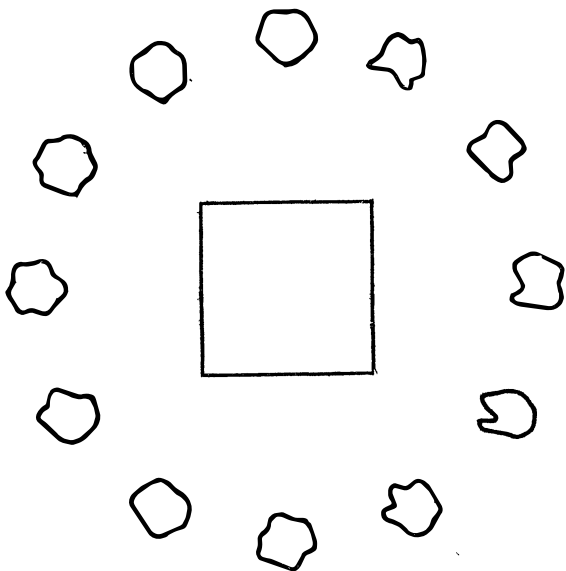
Прошло более семидесяти лет с тех пор, как мой дед, знаменитый Квадрат, написал книгу, в которой изложил свои представления об иных мирах. Ныне я считаю своим долгом подробно рассказать о том, как сильно изменились с тех пор наши воззрения. Я почувствовал особое призвание к этому еще и потому, что меня не покидало смутное ощущение своей вины, которое мне не удавалось полностью заглушить никакими доводами рассудка. Разве не я выступил против высшего знания и бросил своего деда на произвол судьбы? До тех пор пока его не заточили в тюрьму, он все пытался убедить меня в возможности существования третьего измерения. Я же убегал, делая вид, будто все, о чем он говорит, кажется мне бессмыслицей, хотя хорошо сознавал его правоту. Я неоднократно пытался найти оправдание себе в том, что был тогда лишь малым ребенком и, следовательно, не мог нести полной ответственности за свои поступки, но ощущение вины не покидало меня на протяжении многих лет.

Ныне имя моего деда окружено почетом. К сожалению, он не дожил до этих времен, но потомки приложили все усилия к тому, чтобы восстановить справедливость. На рыночной площади города, где родился мой дед, ему воздвигнут памятник в натуральную величину. Вокруг памятника живая окружность из двенадцати деревьев символизирует высшую мудрость.

Каждый год у памятника происходит официальная церемония: здесь собираются профессора математики и физики, а также бургомистр города и многие выдающиеся политические деятели и ученые. В своих речах они предаются воспоминаниям о том, сколь отсталым

было общество в те времена, когда считалось, будто науку можно сковать какими-то узами.

Большие изменения произошли и еще в одной области. За годы, истекшие со времени выхода в свет книги моего деда, была полностью ликвидирована отсталость женщин. Мнение о том, будто женщина — созда-



Памятник моему деду, знаменитому Квадрату, в окружении двенадцати деревьев.

ние глупое (якобы потому, что она обладает головным мозгом крайне малых размеров), не считается более верным. Ныне мы знаем женщин, которые получают образование в университете и даже удостоены ученых степеней. Наука перестала быть монополией мужчин, хотя, по правде сказать, у женщины в силу ее природных особенностей на первом месте всегда стоит супружество. Женщине с присущим ей даром любви и заботы самой судьбой предназначено воспитывать детей и вести домашнее хозяйство. На эти хлопоты у женщины уходит большая часть жизни, так что в ее мозгу обычно не

остаются места для занятий наукой. Великие открытия и изобретения по-прежнему совершают мужчины!

У женщин почти полностью прекратились ужасные приступы ярости, которые порой приводили к немалым бедствиям. Женщина по природе своей склонна подчиняться твердой власти. В прошлом этого не понимали и воспитывали девочек в таком духе, будто они не в состоянии владеть собой. Тем самым юной воспитаннице внушалось чувство безответственности, и женщина считала, что ей дозволено безнаказанно предаваться приступам ярости. На то она и женщина! Ныне женщине хорошо известно, что она несет судебную ответственность наравне с мужчиной.

Не следует упускать из виду и еще один чрезвычайно важный фактор. В соответствии с законом судья, прежде чем начать разбирательство всякого дела, обязан назначить освидетельствование обвиняемого, которое устанавливает его вменяемость. Обычно такое освидетельствование сводится к осмотру внешней формы того лица, о котором идет речь, снизу доверху, и женщина больше всего боится, чтобы в ее «отрезке» не обнаружили малейшего отклонения от прямой. Сколь угодно малое отклонение от прямолинейной формы считается унижительным. Женщина гораздо охотнее согласится, чтобы ее признали вполне вменяемой, хотя при этом ей придется нести полную ответственность за свои действия.

Опасность, какую представляет для общества наша женщина, в значительной мере удалось устранить введением женской «обуви». Каждая женщина, появляясь в общественном месте, носит на заднем конце своего тела специальный чехол — «башмачок». Это позволяет избежать серьезных повреждений, даже если кто-нибудь с небольшой скоростью налетит на женщину сзади. Закон, по которому женщина, находясь вне стен собственного дома, должна непрерывно совершать колебательные движения задним концом своего тела, отменен, став совершенно излишним. Кроме того, женщина, стремительно несясь по улице, не должна более издавать предупредительные крики. Однако среди дам, принадлежащих к высшим слоям общества, долгое время сохранялась мода двигаться по улице на старый манер. Они очень гордились своим умением совершать изящные гармоничные движения задним концом своего тела. Ныне

и этому пришел конец. Уличная молодежь так зло высмеивала светских дам, что те почувствовали себя неловко. Кроме того, не одной даме случалось, совершая упомянутые выше ритмические движения, терять свой «башмачок». Уличные зеваки в насмешку прозвали таких дам золушками.

Чтобы смысл этого прозвища был понятен, вам следует знать, что у нас есть старая сказка про Золушку. Так звали прекрасную девушку, стройную, как отрезок идеальной прямой. У Золушки были две сводные сестры. Они также отличались красотой, но по толщине значительно превосходили ее. Нужно ли говорить о том, что сестры завидовали Золушке и заставляли ее выполнять самую грязную работу. Она должна была не только готовить обед, но и наводить чистоту в доме и выгребать золу из очага. Поскольку Золушка всегда была перемазана в золе и саже, то выглядела она далеко не так, как подобает светской даме.

Однажды в королевском дворце давали бал в честь наследного принца, который в ту пору надумал жениться. Принц хотел выбрать себе в жены самую красивую девушку в мире. Все юные дамы, желавшие участвовать в конкурсе кандидаток в принцессы, приглашались во дворец к девяти часам вечера. Кроме того, приглашение на бал получили все юноши от 18 до 22 лет, правда, с оговоркой: число сторон у каждого из них должно было быть не меньше шести. Проверить выполнение этого условия было довольно просто.

Золушка, как и все девушки, с радостью стала собираться на бал, но ее злые сестры принялись насмехаться над ней и заявили, что явиться во дворец без бального башмачка просто невысказимо. Действительно, по обычаю, существовавшему на протяжении многих веков, дамы, отправляясь на бал, должны были облачать заднюю часть своего тела в специальный чехол, ибо в противном случае, совершая во время танца ритмические движения то в одну, то в другую сторону, они могли бы нанести кому-нибудь тяжелые увечья. Золушка осталась дома. Она села у очага и принялась мечтать о принце, прекрасном двадцатичетырехстороннем юноше. Правда, в последнее время каждая девушка рассчитывала стать принцессой, и целый месяц только и разговоров было — о принце.

И вот в то самое время, когда Золушка печально сидела у очага, вошла соседка и сказала: «Послушай, дитя! Я дам тебе бальный башмачок, какого нет ни у одной другой девушки: маленький, изящный, сверкающий, но сначала мне нужно примерить его на тебя». Золушка хорошенько вымылась и лишь тогда попробовала натянуть башмачок. Он пришелся ей впору. Поблагодарив добрую женщину, девушка поспешила во дворец. Соседка успела лишь предупредить Золушку, чтобы та не забыла вернуться домой до того, как пробьет 12 часов. «Башмачок,— пояснила соседка,— сделан из синтетического материала, который остается твердым не более трех часов, и после того, как башмачок растает, ты с липким комком на теле превратишься в совершенно нелепую фигуру». Это была ложь, ибо башмачок был сделан из прекраснейшего хрусталя, который мог без малейшего ущерба выстоять века и великолепно служить и дальше. Соседка хорошо разбиралась в людях и понимала, что принц, который, конечно, влюбится в Золушку, будет потрясен, когда прекрасная фея бала внезапно исчезнет.

Так и случилось. Когда Золушка появилась во дворце, веселье было в разгаре. Взоры всех присутствующих обратились к ней, а принц тотчас же поспешил навстречу вновь прибывшей. Красота Золушки произвела ошеломляющее впечатление на всех юношей, бывших на балу. Хрустальная туфелька выгодно подчеркивала стройность ее тела. Принц танцевал с Золушкой подряд все танцы, но вот пробило двенадцать часов. Золушка испуганно вскрикнула, повернулась и бросилась бежать. Входные двери дворца были заперты, но девушка проскользнула через отверстие для вентиляции. Принц, бросившийся за ней, был поражен тем, что его возлюбленная смогла проникнуть через такую узкую щелочку. Разумеется, принцу было не под силу последовать за Золушкой, но что это? Перед ним лежала крохотная изящная туфелька Золушки, которую та потеряла, когда проскальзывала через узкое отверстие. Принц поднял хрустальную туфельку и поклялся, что найдет ее обладательницу.

На следующий день он отправился в город. Впереди шествовали герольды, извещавшие население о том, что вознамерился предпринять принц. Каждой юной даме

разрешалось заявить о своем желании примерить хрустальную туфельку. Многих постигло горькое разочарование, когда изящная туфелька оказалась для них слишком узкой и маленькой. Сестры Золушки также попробовали натянуть на себя заветную туфельку, но их попытки, как и следовало ожидать, не увенчались успехом. Тогда Золушка спросила, нельзя ли и ей примерить туфельку. Сестры принялись смеяться над ней и, не скрывая презрения, насмешливо спрашивали: «Уж не принцесса ли ты, Золушка? Не хочешь ли ты, замарашка, выйти замуж за принца?» Накануне вечером они ее не узнали.

Каково же было изумление стоявших вокруг прохожих, когда туфелька пришлась Золушке впору. Принц тотчас узнал свою избранницу и с торжеством повез ее во дворец. Вскоре они поженились. Принц и Золушка жиди долго и счастливо, у них родилось много детей: двадцать пять красавцев-сыновей и стройных красавиц-дочерей.

2. СМЯГЧЕНИЕ КАСТОВОГО ДУХА

Кастовость, на протяжении нескольких веков пронизывавшая нашу общественную жизнь, не была полностью преодолена, а лишь утратила свою остроту. Когда увидели, что женщина по уму не уступает мужчине и ее отсталость обусловлена в основном отсутствием должного образования, стало ясным, что одна лишь величина угла при вершине (вместилище головного мозга) сама по себе недостаточна для того, чтобы судить о степени умственного развития. В прежние времена никому и в голову не пришло бы искать ученых среди Равнобедренных Треугольников, а теперь случалось, и не единожды, что среди Равнобедренных Треугольников оказывались не просто юноши, обладающие склонностью к наукам, а фигуры, которые со временем становились Равносторонними профессорами.

Взросшая свобода в общении обоих полов также способствовала уменьшению кастовых барьеров. Различия между девушками, принадлежащими к различным кастам, всегда были незначительными, и в прошлом нередко случалось, что Окружность брала в жены первую же очаровавшую ее девушку. Огромное число сто-

рон позволяло Окружности быть беспечной. Какое ей дело до того, что у ее потомка будет на две стороны меньше?

Постепенно такую же неразборчивость стали проявлять и другие касты. Сначала она затронула Многоугольники с большим числом сторон, а затем распространилась на Шестиугольники, Пятиугольники и даже на Квадраты и Равносторонние Треугольники. Равносторонний Треугольник, у которого при неудачном выборе супруги рождались равнобедренные дети, не стыдился этого и не только не отказывался от своих сыновей, но даже поселял их вместе с собой и воспитывал с такой любовью, словно те были настоящими Квадратами.

В то же время у Равнобедренных Треугольников наблюдалось заметное ослабление честолюбивых помыслов. Мне случалось знать одного из Равнобедренных Треугольников, у которого угол при вершине составлял $59\frac{1}{2}^\circ$. Он очень удачно женился, и все его сыновья были настоящими Равносторонними Треугольниками. Однако счастливый отец и не помышлял о том, чтобы получить официальное свидетельство Санитарной и социальной комиссии. Более того, когда члены высокой комиссии прибыли к нему на дом, чтобы обследовать форму его сыновей, наш Равнобедренный Треугольник пытался угрожать уполномоченным лицам, крича, что «он до них еще доберется».

Разумеется, никакие угрозы не смогли помешать членам комиссии исполнить свой долг. Принятое ими решение гласило: детей, как предписывает закон, надлежит отобрать у Равнобедренного отца и отправить на воспитание в одну из бездетных семей Равносторонних Треугольников. Тогда отец призвал на помощь всех соседей, а сыновья оказали членам комиссии отчаянное сопротивление. Лишь после вмешательства полиции порядок был восстановлен. Однако юные Равносторонние Треугольники не пожелали смириться со своим новым окружением. Они заявили, что считают отцовскую любовь более высокой добродетелью, нежели равенство сторон. Каждое воскресенье юные Треугольники отправлялись навестить своего равнобедренного отца, не взирая на запреты приемных родителей, пока те, доведенные до отчаяния непослушанием своих подопечных, не

были вынуждены отказаться от воспитания непокорных юнцов.

Комиссия полагала, что возврат строптивых юнцов их равнобедренному отцу послужит устрашающим примером для других, но он возымел совершенно иное действие. Когда еще в одной семье родились равносторонние дети, их отец открыто заявил, что намерен оставить детей у себя дома и воспитывать их самостоятельно. Санитарная и социальная комиссия оказалась в весьма затруднительном положении, но затем был найден удачный на первый взгляд выход: кто-то предложил в подобных случаях оставлять детей на воспитание отцу, внося последнего в книгу записи актов гражданского состояния как Равносторонний Треугольник, даже если в момент регистрации угол при его вершине будет меньше 60° . Это предложение было провалено. Противники его заявили, что лучше вообще отказаться от эпитета Равнобедренный, чем вводить людей в заблуждение ложными Равносторонними Треугольниками.

Оппозиция одерживала одну победу за другой. В кругах Равнобедренных Треугольников широкой популярностью пользовались лозунги «Оставайтесь сами собой. Не стремитесь стать равносторонними!» и «Не женитесь на женщинах с хорошей родословной, ибо ваше потомство будет равносторонним!»

Положение сложилось гораздо более тяжелое, чем при открытом восстании: против высших слоев общества никто открыто не выступал, их просто презирали. Порой это презрение принимало весьма серьезные формы. У Равносторонних Треугольников совсем не трудно найти ту сторону, на которой расположен их глаз, хотя все три угла при вершинах Равностороннего Треугольника равны. Широкое распространение получила грубая шутка. Обращаясь к Равностороннему Треугольнику, обидчики заговаривали не с той вершиной, где находится его глаз (и рот), а с другой и, не получив ответа, делали вид, будто ошиблись, заявляя в свое оправдание: «Прошу прощения, но у вас так трудно отличить переднюю сторону от задней!»

Подобная грубость, повторявшаяся неоднократно и носившая преднамеренный характер, пробуждала у низших слоев общества чувство собственного достоинства. Если учесть к тому же всеобщее распространение

образования, то станет ясно, что самосознание сословия Равнобедренных Треугольников укреплялось все больше и больше. Медицина также добилась значительных успехов, и операции по увеличению числа сторон у фигуры стали гораздо менее опасными и дорогостоящими.

Прежде подобные операции удавались лишь в исключительных случаях. Ныне неудачный исход стал происшествием чрезвычайным. Недавно один Равнобедренный Треугольник надумал подвергнуть операции сразу всех трех своих сыновей. После предварительного размягчения периметра юноши поступали в госпиталь. Когда операция была успешно закончена, один из них стал Шестиугольником, другой Десятиугольником и третий — Двенадцатиугольником, причем равенство сторон каждого из них подтверждалось официальным свидетельством.

Члены семьи не прониклись почтением к Двенадцатиугольнику. Наоборот, не только его братья, но и сам треугольный отец разрешали себе подшучивать над ним, называя его в насмешку «Додекагором»¹, «Двенадцати-ком» и «Надцатиком». Санитарная и социальная комиссия обратилась к юному Двенадцатиугольнику с запросом, не желает ли он вступить в благородное сословие, но получила отрицательный ответ. Отец Двенадцатиугольника высмеял составителей запроса, да и сын ответил им в том же духе. С тех пор у Двенадцатиугольника появилось еще больше прозвищ. Его стали называть и «Додекаграфом», и «бароном фон Додекагоном», и «герцогом Надцатиугольником».

Ясно, что подобные случаи надлежит рассматривать как отказ от того чрезмерного уважения, с которым в прежние времена относились к средним и высшим слоям общества. Такая реакция, как и все реакции, носила лишь временный характер. Правда, она наблюдается еще и в наши времена. Нужно сказать, что преувеличенное почтение, с которым относились к Окружности люди старой закалки, ныне окончательно исчезло. Теперь значение придается самой личности, и какой-нибудь Равносторонний Треугольник бывает окружен большим по-

¹ Искаженное «додекагон» — двенадцатиугольник. — *Прим. пер.*

четом и уважением, чем ленивая Окружность, способная твердить лишь о славе своих предков.

Вместе с тем интересно заметить, что происхождению в наше время уделяется гораздо больше внимания, чем прежде, и хорошая родословная ценится гораздо выше, чем внезапный переход в гораздо более высокое сословие. Двадцатичетырехугольник, ставший правильным после оперативного вмешательства, по общему мнению, занимает более низкую ступень в таблице о рангах, чем Шестиугольник, достигший своего состояния в результате постепенного восхождения его предков по общественной лестнице. По специальным регистрам и книгам записи актов гражданского состояния всегда можно проверить, сколько времени понадобилось интересующему вас лицу для того, чтобы достичь нынешнего числа сторон.

Я не думаю также, что в будущем хорошее происхождение будет цениться меньше, чем теперь. Здесь многое зависит от наименее образованных слоев общества, придающих большое значение сословным различиям. Однако и в школах высших ступеней юношеству внушают, что принадлежность к благородному сословию ко многому обязывает. В этой связи уместно привести изречение одного древнего философа, который сказал: «Чтобы создать собственное состояние, нам прежде всего необходимо избавиться от наследия отцов».

Переворот в наших представлениях, протекавший вполне мирно, привел к важным последствиям не только в области политической экономии, но и в области науки. Здесь также повеяли новые освежающие ветры, и ученые смогли избавиться от косности и рутины. Новые представления получили доступ в науку, и результат не замедлил сказаться. Ныне никто не осмелился бы назвать провозвестника существования третьего измерения преступником или опасным безумцем. По-видимому, все согласятся с тем, что лишь немногие верили в существование третьего измерения до того, как оно было провозглашено Гиперокружностью¹, и в этом есть определенный резон. Ныне же никто более не спрашивает, откуда возникли новые представления. Кроме того,

¹ Гиперокружность (*флатл.*) — двумерная сфера в привычном для нас трехмерном пространстве. — *Прим. перев.*

у каждого Квадрата могут быть свои очень интересные идеи. Если говорить о моем деде, то у него такие идеи были.

3. ПУТЕШЕСТВИЯ И ОТКРЫТИЕ МИРА

Наши представления о том, как устроен мир, претерпели значительные изменения по той причине, что путешествия и совершенные во время их открытия во многом способствовали расширению наших взглядов. Еще недавно мы полагали, будто весь мир хорошо изучен. Все были убеждены в том, что интерес представляют лишь те края, в которых побывали путешественники. Но они побывали далеко не всюду, и это обстоятельство само по себе говорит о том, что мир бесконечно велик.

Флатландцы были убеждены в том, что все обитаемые страны населены такими же существами, как и они сами, и что отличия могут состоять самое большее в уровне развития и цивилизации. Разумеется, никто не сомневался в том, что наиболее развитые существа находятся именно в нашем обществе. Сама мысль о том, что где-то могут обитать недоразвитые существа (по крайней мере, если говорить о настоящем времени), казалась нелепой. Все думали, что мир в будущем будет населен облагороженной расой. Общество в своем развитии достигнет такой ступени, когда все мужчины будут Окружностями, а все женщины — изящными тонкими Отрезками прямых, и те, и другие будут одинаково благородными по духу и по рождению. Полностью исчезнут преступления: их некому будет совершать. Каждый станет честным и добропорядочным, и в прекрасном мире будущего каждый станет с удовольствием выполнять порученное ему дело. Много времени будет оставаться для досуга. Его будут использовать для того, чтобы облагораживать собственное тело. Кроме того, каждый в свободное время сможет укрепить свой разум пищей духовной. Любое преступление, или, лучше сказать, «деяние, не столь благородное, как обычно», будет рассматриваться как заболевание, а виновника его подвергнут лечению в клинике.

Так мечтали мы об идеальном государстве далекого будущего как о конечном продукте счастливой эволюции

нашей столь благородной в своей основе расы. В том, что в современном мире мы по своему развитию превосходим всех остальных существ, были убеждены все, кроме одного отшельника-философа. По его мнению, не исключалась возможность, что где-то в отдаленной стране обитают гораздо более развитые существа, которые считают нас народом, стоящим на низкой ступени развития, и, быть может, даже рассматривают как своего рода домашних животных. Но предсказания отшельника не оправдались. В какой бы части света ни оказывались наши путешественники в своих странствиях, они всюду обнаруживали существ, подобных нам, которые в своем развитии достигли гораздо более низкой ступени, чем мы.

Например, была открыта страна, у всех обитателей которой угол при вершине меньше 10° . Сначала наши путешественники думали, что имеют дело с выродившейся расой, но более тщательные исследования выяснили иную картину: по существующему обычаю всех мальчиков с углом при вершине больше 10° обитатели этой страны просто умерщвляли. При опросе обнаружилось, что некогда страну населяли гораздо более разумные и развитые существа: Равносторонние Треугольники, Квадраты и даже Многоугольники, но после одного восстания они вывелись. В кровопролитном сражении, положившем конец их господству, победу одержали Равнобедренные Треугольники с весьма острыми углами при вершинах. Они так беспощадно уничтожали всех своих противников, что все высокоразвитые существа погибли. В живых остались лишь Равнобедренные Треугольники, причем в основном с весьма малым углом при вершине. Большинство голосов они установили верхнюю границу для угла при вершине в 10° . Правда, у тех Равнобедренных Треугольников, которые голосовали против, углы при вершине были больше 10° , но они были беспощадно истреблены воинами, и новый закон вступил в силу.

Сначала жители той страны, о которой идет речь, жили весело и счастливо. Это был сильный народ, способный одолеть любого противника. Однако вскоре они стали замечать, что хозяйство страны мало-помалу приходит в упадок. Нельзя сказать, что Равнобедренные Треугольники с углом при вершине в 10° не были пол-

ностью лишены разума, но деятелей науки и искусства среди них почти не встречалось. Вся духовная жизнь постепенно замерла. Общество было обречено на отставание. Конкуренция с другими странами, не подвергшись такой «нивелировке» не могла продолжаться долго. Некогда процветавшая страна не только отстала в своем развитии, но и превратилась в третьеразрядную державу. Не прошло и века, как в области культуры она утратила свое прежнее положение и заняла самое последнее место среди соседних народов.

В другой стране, расположенной неподалеку от первой, внимание, уделяемое духовному развитию народа, было необычайно высоко. Не забывали там и о физической культуре (все обитатели страны занимались спортом), но армия отсутствовала. Жители надеялись, что смогут обойтись и без нее. Полная гармония тела и духа настолько ускорила эволюцию в этой стране, что Равнобедренные Треугольники в ней почти вывелись, а у оставшихся угол при вершине был больше 50° . Страна прямо-таки кишела Многоугольниками и Окружностями. Жизнь там была райской, как вдруг наступило жестокое разочарование.

Соседнее государство, содержавшее сильную армию, но не достигшее столь высокого жизненного уровня, стало зариться на богатства этой страны, расположенной в непосредственной близости от него, и двинуло свои войска через границу. Следуя ими же выдвинутой теории, согласно которой все богатства земли должны принадлежать сильнейшему, захватчики, застав врасплох миролюбивых соседей, истребили подавляющее большинство коренного населения, захватили все богатства и, обратив в рабство оставшихся в живых обитателей, заставили их работать на себя.

Дальше на юг, где притяжение сильнее и плотнее атмосфера, были открыты племена, стоящие еще на очень низкой ступени развития. Жили эти племена в густых лесах. Равносторонних Треугольников и более высоко развитых существ среди них не было обнаружено. Все они представляли собой Равнобедренные Треугольники с очень малым углом при вершине. В среднем этот угол не превосходил 30° , но у отдельных особей был еще меньше. В этих же лесах путешественники встретили пигмеев, карликов, которые ростом были не больше

нашего ребенка. Это открытие потрясло цивилизованный мир: о карликах часто говорили, но никто не подозревал, что они существуют в действительности.

В самой чаще густых темных лесов был обнаружен целый народ, состоявший из Неправильных фигур. Сразу было ясно, что в умственном развитии Неправильные фигуры — народ очень отсталый и что все они прирожденные преступники. К счастью для цивилизованного мира, большинство из них не могут выходить за пределы ареала своего обитания. Неправильные фигуры велики по размеру и слишком бесформенны для того, чтобы передвигаться между деревьями, поэтому обычно они поселяются на открытых местах, выбирая для этого лесные поляны или искусственно расчищая площадки. Стремясь ко всемерному росту благосостояния своих народов, цивилизованные государства решили полностью уничтожить этих дикарей, являвших собой оскорбительную карикатуру на Правильные Многоугольники. В операции по очистке лесов от Неправильных фигур все цивилизованные народы приняли участие тем охотнее, что в местах обитания этих бесформенных чудовищ были обнаружены полезные ископаемые, столь высоко ценимые развитыми странами. Разногласия по поводу раздела освободившейся территории послужили причиной возникновения войн между различными нациями.

Рассказ обо всех народах, открытых в нашем мире, увел бы меня далеко в сторону, поэтому я упомяну еще только об амазонках. Это был народ, который, как все думали, состоял из одних лишь женщин. И действительно, никто и никогда не видел среди амазонок ни одного мужчины. Относительно того, каким образом происходит размножение у амазонок, существовали самые различные теории, и ученые немало поломали головы, размышляя над этой тайной, пока не обнаружили, что все теории неверны.

Оказалось, что в действительности мужчины в стране амазонок все же были. Это оказались главным образом пленные. Отряд их был очень немногочислен, и составляли его одни лишь Квадраты и Многоугольники. Мальчиков, рождавшихся Треугольниками, немедленно умерщвляли, даже если они и были Равносторонними. Из числа остальных Многоугольников в живых остав-

ляли ровно столько, сколько требовалось для нужд общества. Уцелевших мужчин содержали в специальном лагере, выпуская их лишь для продолжения рода амазонок и выполнения различных работ по хозяйству. Несколько часовых-амазонок без труда поддерживали порядок. При малейшем неповиновении они безжалостно пронзали мужчин.

Из истории известно, что однажды мужчины подняли восстание. Улучив момент, они напали на охрану, надеясь убежать. Все войско амазонок устремилось в погоню за беглецами. Поскольку наиболее вооруженными из них были Квадраты, а другие Многоугольники имели еще более тупые углы при вершинах, то защищаться мужчины не могли. Настигшие их амазонки беспощадно перебили всех, буквально пронзая их насквозь.

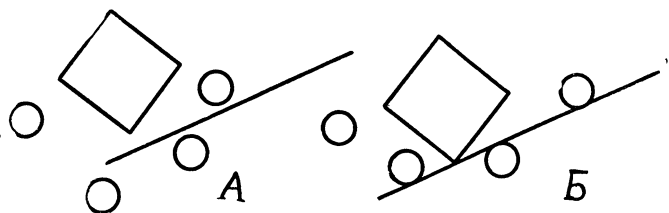
Государство амазонок было бы заведомо обречено на вымирание, если бы эти воительницы постоянно не заботились о «подвозе» новых мужчин. Поставщиками мужчин служили главным образом сопредельные страны. «Заготовка» не обходилась без войн, и многие амазонки пали на поле брани, но этим превосходным воительницам, несмотря на потери, все же удавалось каждый раз одерживать победу и увозить с собой в плен значительную часть мужского населения побежденной страны.

Если бы «экспедиция» за мужчинами проводилась один-единственный раз, то причиненное ею зло было не столь уж велико, но успех, сопутствовавший первой же попытке насильственного угона мужчин, открыл амазонок, и они почувствовали вкус к подобным набегам. Умыкать взрослых мужчин казалось амазонкам гораздо более простым делом, чем растить тех же мужчин с детских лет. В соответствии с этими взглядами амазонки стали умерщвлять всех рождавшихся у них младенцев мужского пола, оставляя в живых лишь новорожденных женского пола. Девочек воспитывали как солдат, причем никаких помех, создаваемых присутствием мальчиков, у амазонок, естественно, не было.

Нужно ли говорить о том, какое негодование вызывали у соседних государств эти набег, тем более что амазонки действовали дерзко и безрассудно. Они мародерствовали, грабили решительно все, что попадалось под руку, и к тому же облагали страны непомерной

данью. Последние, естественно, в конце концов воспротивились и, собрав общими усилиями огромное войско, двинулись на амазонок. В кровопролитном сражении, в котором обе стороны понесли большие потери, победу одержали женщины. Нетрудно представить, сколь ужасной была месть Беллафорты, царицы амазонок. Все юноши в покоренных странах были беспощадно умерщвлены, а девушки угнаны в рабство. Получив специальную подготовку, они должны были затем служить в войсках амазонок. Тех же, кто проявлял преданность своей семье и родине, беспощадно умерщвляли.

Страны, еще не успевшие к тому времени испытать на себе иго амазонок, не на шутку встревожились. Со-



Царица амазонок Беллафорта в момент нападения на нее сержанта Квадрата (А) и после того, как она застряла между деревьев (Б)

стоялась весьма представительная конференция глав государств, на которой подробно обсуждалось создавшееся серьезное положение. Предложение о том, чтобы выставить против амазонок женское войско, было отвергнуто, поскольку обучение такого войска заняло бы слишком много времени. После долгих препирательств главы государств решили, что наиболее эффективным в борьбе с амазонками должно быть войско, набранное из солдат с весьма острыми углами при вершинах.

Поход, в котором я сам принял участие совсем еще молодым лейтенантом, навсегда останется славной страницей в истории Флатландии. Наш главнокомандующий, принц Арматус, знатный Десятиугольник, был необычайно искусным стратегом. Вместе со своим войском он подстерег амазонок на опушке огромного леса. Свои отборные войска он расположил у самых деревьев. Солда-

ты стояли плечом к плечу так плотно, что из-за них не видно было леса. Когда амазонки стремительно бросились на нас, солдаты в самый последний момент отступили за деревья. Несущиеся с бешеной скоростью воительницы почувствовали опасность, когда было поздно: острия их тел вонзились в деревья. Многие амазонки переломились пополам, другие прочно застряли в деревьях и стали легкой добычей наших пехотинцев, атаковавших их сбоку.

Царица Беллафорта и ее штаб, находившиеся в арьергарде и оттуда руководившие боем, попытались было бежать. Развернувшись, они устремились к группе отдельно стоявших деревьев, надеясь, что им удастся ускользнуть, но наши солдаты, замаскировавшиеся на этом участке, напали на беглецов сбоку. Саму царицу амазонок взял в плен некий сержант по имени Квадрат, сумевший защемить Беллафорту так, что она прочно застряла между тремя деревьями. Беллафорта не могла двинуться ни вперед, ни назад. Ее с торжеством извлекли из ловушки и затем долго возили по разным странам, выставляя напоказ на армарках. Храбрый сержант за проявленное мужество был осыпан почестями и наградами, а после операции, произведенной за счет государства, превратился в Двенадцатиугольник и был возведен в благородное сословие.

4. ДЕРЕВЬЯ, ДИКИЕ ЗВЕРИ И МОРЕ

Хотя мы достаточно много говорили о деревьях и лесах, однако вполне возможно, что вы не вполне ясно представляете себе, как выглядят деревья у нас, во Флатландии. Так же, как и у вас в Трехмерии, наши деревья представляют собой живые существа, стоящие на сравнительно низкой ступени развития и лишенные способности самостоятельно передвигаться с места на место. Наши деревья могут лишь ощущать внешние воздействия, но не могут видеть, слышать или говорить. Однако растут они не вверх и у них нет длинных стройных стволов. Наши деревья — это иногда круглые, иногда ребристые образования, которые по мере роста постепенно утолщаются. На поверхности деревьев образуются семена, которые затем отделяются и закрепляются на некотором удалении от породившего их дерева.

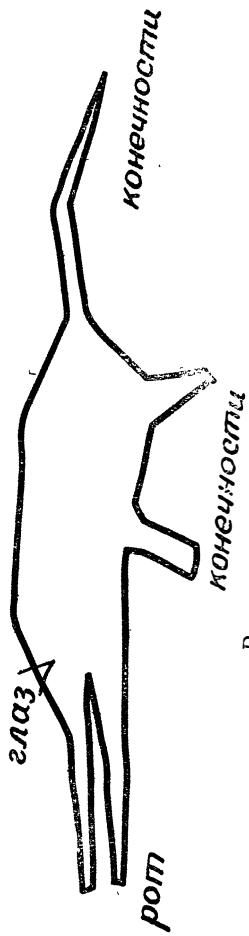
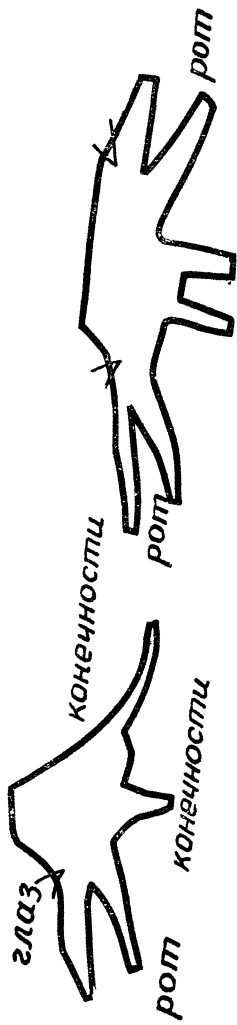
Из семян со временем вырастают новые деревья. Достигнув определенной зрелости (у некоторых пород критический возраст больше ста лет), деревья умирают и рассыпаются в прах.

Иногда деревья в лесу стоят так густо, что одно дерево срастается с другим. Лес в таких случаях становится поистине непроходимым. Однако и до того, как деревья срастутся, лес может стать столь дремучим, что взрослому флатландцу не под силу протиснуться сквозь него. Дети еще могут кое-как пробраться сквозь узкие промежутки между отдельными представителями растительного царства, но при этом возникает серьезная опасность, которую не следует упускать из виду: дети легко могут заблудиться в лесу. Ведь они не обладают способностью ориентироваться на местности, присущей лишь взрослым флатландцам, которые особым чутьем определяют направление силы притяжения (то есть направление на юг) и, кроме того, умеют по окраске деревьев определять направление на север. Дело в том, что все наши деревья имеют зеленоватую окраску, которая с северной стороны гуще, чем с южной: дожди, идущие с севера, обильнее увлажняют именно северную сторону наших деревьев.

Различных пород деревьев открыто очень много. В южных странах деревья получают больше влаги, имеют более зеленый цвет и растут быстрее, чем на севере. Атмосфера там насыщена водяными парами, поэтому для жителя севера прогулка по тамошнему лесу иногда бывает неприятной. Северянина охватывает гнетущее, тревожное чувство. Нередко он испытывает в чаще южных лесов сильный страх, и не без оснований, поскольку там в непроходимых дебрях обитают существа, представляющие серьезнейшую опасность для путешественника.

Среди животных, населяющих Флатландию, но не известных обитателям Трехмерия, прежде всего можно назвать ящеров.

Внешний вид ящеров не одинаков, что свидетельствует о принадлежности их к различным видам. Если вы захотите узнать о ящерах побольше, то я рекомендую вам обратиться к флатландским учебникам зоологии, в которых описаны разнообразнейшие животные. Не вдаваясь в подробности, можно сказать,



Различные виды ящеров.

что все ящеры имеют жесткую грубую оболочку, покрытую мелкими выступами, или чешуйками. В оболочке ящеров имеется одно или несколько углублений (каждое такое углубление называется пастью), через которые ящер может втягивать внутрь себя других существ, даже если те стоят на более высокой ступени развития. Нападая, ящер раскрывает пасть и поглощает тело своей жертвы.

О том, насколько небезопасна жизнь среди подобных чудовищ, достаточно свидетельствует хотя бы тот факт, что совсем недавно из девственных южных лесов не вернулась научная экспедиция, занимавшаяся там изучением флоры и фауны. Лесорубы, валившие деревья на опушке леса, слышали доносившиеся издали душераздирающие вопли и крики о помощи, но не решились тотчас же броситься на выручку, а вместо этого сообщили обо всем в расположенный неподалеку город. Специально снаряженная военная экспедиция, прибыв на место происшествия, смогла лишь восстановить подробности разыгравшейся трагедии. Среди кустарников и деревьев были обнаружены останки некоторых ученых и часть собранных ими материалов.

Хотя путешественники, отправлявшиеся на восток и на запад, каждый раз обнаруживали другие народы, у обитателей Флатландии гораздо больший интерес вызывали страны, расположенные далеко на юге. Объяснялось это тем, что и на востоке, и на западе Флатландии климат, сила притяжения и давление воздуха остаются по существу неизменными, а вот по мере продвижения на юг сила притяжения заметно возрастает и вместе с ней увеличивается давление воздуха. К тому же в южных областях более высокие температуры и растительность отличается большей пышностью.

Довольно скоро выяснилось, что перенести все тяготы путешествия в южные страны под силу далеко не каждому. Многие пали жертвой особой болезни — тропической лихорадки, протекающей иногда в столь острой форме, что больной погибает через несколько часов после начала болезни. При появлении первых же симптомов больной подлежит немедленной отправке в более умеренный климат, однако в большинстве случаев сделать этого не удастся. Путешествующие в одиночку заведомо обречены в этих случаях на смерть. Однако

тропическая лихорадка не раз сводила в могилу и большие экспедиции. Чтобы отважиться на путешествие в изнурительном климате, нужна немалая доза мужества и упорства. Те, кто ставил перед собой столь сложную задачу, стремились лишь к одной цели: успешному завершению экспедиции! Они упорно старались проникнуть как можно дальше на юг! Когда же один из членов экспедиции заболел, остальные просто не решались повернуть назад до тех пор, пока чувствовали себя вполне здоровыми. Они продолжали продвигаться на юг, заражая друг друга, до тех пор, пока не заболел последний. В итоге погибал весь состав экспедиции до единого человека.

Тщательная подготовка и строгий медицинский контроль все же позволили отобрать тех, кто способен выдержать длительное пребывание в жарком климате, и укомплектованные таким образом экспедиции заново обследовали южные страны. Действительно, по мере продвижения на юг в условиях повышенной влажности растительность становится все более пышной. Деревья вырастают чрезвычайно мощными, а их поверхность обычно покрывает мох или плесень, полностью обволакивающая дерево. Так же как и у вас в Трехмерии, мертвые растения и животные в такой атмосфере быстро разлагаются. Оказавшись среди девственных тропических лесов, вы как бы попадаете внутрь сосуда, наполненного гниющими отбросами. Миазмы вызывают головокружение, шум в ушах, туманят разум. Заметив угрожающие симптомы, руководитель экспедиции обязан тотчас же повернуть назад. Опыт вернувшейся, пусть даже неудачной экспедиции принесет науке больше пользы, чем безвременная гибель исследователей.

Довольно скоро выяснилось, что по мере продвижения на юг леса становятся все более непроходимыми из-за густого подлеска и змееподобных лиан, закрывающих все проходы.

Поскольку флатландцев очень интересовало, нет ли за лесами открытого пространства, они снарядили экспедицию, в состав которой вошли солдаты — рубщики лиан. Ими стали Равнобедренные Треугольники с весьма острым углом при вершине, специально снаряженные для работы в жарких странах. Это был знаменитый по-

ход, продолжавшийся довольно долго. Многие уже начали сомневаться в возвращении экспедиции, как вдруг весь цивилизованный мир с быстротой молнии облетела весть о ее возвращении. Оставшиеся в живых рассказали о том, как им с большим трудом удалось пройти сквозь густые леса и в конце концов выйти на берег моря — мирового океана, в котором собиралась падающая с севера дождевая вода. На берегу моря отважные путешественники увидели необычайных живых существ — животных, которые могли передвигаться лишь по линии, отделяющей воду от суши, легко становились добычей членов экспедиции и послужили великолепным пополнением ее запасов продовольствия.

Возвратившихся ожидали всевозможные почести и слава. Научных руководителей экспедиции избрали членами различных ученых обществ. Их считали открывателями границ мира, ибо (как полагали несведущие) никому и в голову не придет исследовать, что находится за линией, отделяющей мировой океан от суши. Однако вместо того, чтобы стать завершающим этапом эпохи великих открытий, эта экспедиция положила начало все более и более дерзким попыткам исследовать Флатландию.

Не прошло и года, как отправилась новая экспедиция, снабженная всем необходимым оборудованием, чтобы в герметически замкнутых лодках опуститься под линию, отделяющую море от суши. Члены этой экспедиции по возвращении представили описания животных, увиденных ими под поверхностью моря, и рассказали о жестоких битвах между обитателями подводного царства, разыгравшихся на их глазах. Животных, обитающих под водой, удобнее всего назвать одним собирательным словом «рыбы», однако не следует думать, будто между морскими чудовищами имеются лишь незначительные различия. Наоборот, обитатели подводного мира существенно отличаются друг от друга как по форме, так и по величине. Одни из них имеют очертания окружности, другие напоминают ланцет, третьи имеют весьма неправильную форму. Членам экспедиции случалось видеть и странных существ с длинными щупальцами. Одно из таких существ схватило своими щупальцами подводную лодку экспедиции. Экипаж уже считал себя погибшим, как вдруг пришло неожиданное избавление: чудо-

вище поранило щупальце об одну из острых вершин лодки и выпустило свою добычу.

Новые экспедиции продолжали исследования Флатландии по другую сторону моря. Там были обнаружены пышные заросли великолепных растений. Исследователи провели бурение морского дна и обнаружили, что оно состоит из очень твердого вещества, названного «камнем» или «скальной породой».

Ныне «границы» мира все же установлены, и лишь философы могут рассуждать о том, незыблемы ли они, толсты или тонки, простираются ли до бесконечности, нет ли за границей нашего мира другого, незамкнутого, пространства, иного мира и что это такое. Наука в настоящее время не может ответить на все эти вопросы.

5. КРУГОСВЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ

Иногда случай может сыграть в истории науки совершенно неожиданную роль. Известно, что научные экспедиции, требующие больших затрат, усилий и сопряженные с опасностью для жизни исследователей, далеко не всегда оправдывают огромные расходы. В то же время нельзя не удивляться тому, что иное путешествие, не требующее особых приготовлений, порой может иметь для науки неоценимое значение. Именно так и произошло с путешествием, в которое отправились двое туристов, заключивших между собой пари.

В некоем городе существовало общество под названием «Клуб Квадратов», членами которого могли состоять лишь Квадраты. Среди членов клуба находились два бывалых путешественника, которые очень любили хвастать своими приключениями. Стоило лишь зайти разговору о чужих странах и народах, как друзья принимались спорить: они все пытались выяснить, кто из них путешествовал больше. Для разрешения спора была создана специальная комиссия, которая в своей работе столкнулась с немалыми трудностями. Дело в том, что один из путешественников, господин Ориенталис, посетил больше стран и повидал больше народов, в то время как другой, господин Окциденталис, странствовал на большем удалении от дома. Отдать предпочтение кому-нибудь из двоих было чрезвычайно трудно, и после дол-

того обсуждения комиссия решила объявить победителем господина Окциденталиса. Тогда Ориенталис заявил, что он намерен превзойти своего друга и соперника не только по числу стран, но и по дальности маршрутов. Было заключено пари. Оба спорщика должны отправиться в путешествие: Ориенталис на восток, Окциденталис на запад. Отчеты о путешествии должны были помочь установить, кто из двух друзей заслуживает более громкой славы.

Сначала Ориенталис хотел испросить себе длительный отпуск и совершить налегке путешествие продолжительностью в несколько недель, но когда он узнал, что его соперник затеял такие приготовления, словно отправляется в научно-исследовательскую экспедицию, то передумал и также принялся за подготовку разнообразного снаряжения. Ориенталис сам сварил пищевые концентраты и приобрел оружие на случай, если в пути придется защищаться от разбойников или диких зверей. Он заказал столько всего, что в случае необходимости сделанных запасов должно было хватить по крайней мере на год.

В заранее назначенный день в присутствии всех членов «Клуба Квадратов» оба путешественника пустились в путь в противоположные стороны.

В стенах клуба долго еще обсуждали успех дерзкого предприятия. Шансы обоих соперников оценивались примерно одинаково.

Когда прошел год и ни один из путешественников не вернулся, члены клуба забеспокоились. Спорщики славились своим упрямством, и вполне могло случиться, что каждый из них, желая непременно превзойти соперника, продолжал уходить все дальше и дальше, пока не встретил какое-нибудь непреодолимое препятствие, а может быть, и смерть. Все сочли ошибкой то обстоятельство, что в условиях состязания не был установлен предельный срок, в течение которого оба соперника должны завершить свой вояж, ибо в сложившейся ситуации, даже если бы один из них благополучно вернулся, то его все равно нельзя было бы объявить победителем, не убедившись предварительно в том, жив ли второй путешественник и не прилетит ли он известий о себе. Президент клуба предложил объявить победителем первого, кто вернется, а если впоследствии окажется, что квадрат, вер-

нувшийся вторым, проделал более длинный путь, то ничто не мешает устроить еще одно чествование. Это предложение получило всеобщее одобрение, но проходили дни, недели, месяцы, а о путешественниках не было ни слуху ни духу. Минуло три года. Беспокойство росло. Об этом случае говорили лишь шепотом, словно обоих путешественников уже не было в живых. Но спустя два месяца оба без вести пропавших самолично явились в клуб и заговорили со своими друзьями так, будто ничего особенного не произошло. Господин Ориенталис сообщил, что пари выиграл его друг господин Окциденталис, но обо всем остальном оба хранили молчание.

Позднее они представили подробный доклад о своих открытиях, которые оказались столь замечательными, что привели весь ученый мир в состояние необычайного возбуждения. Что же собственно произошло с двумя путешественниками? Ориенталис отправился в путь, держа курс на восток. Так же как и его соперник, он взял с собой новейший прибор для измерения силы притяжения, позволявший ему двигаться без малейших отклонений. Если показания прибора уменьшались, то это означало, что маршрут отклонился к северу. Если же показания прибора увеличивались, то это означало, что маршрут отклонился к югу.

Много месяцев шел Ориенталис все дальше и дальше, от города к городу, из страны в страну. Сначала его путь пролегал через известные страны с цивилизованным населением, но затем Ориенталис вступил в пределы обитания более отсталых племен, с удивлением смотревших на путешественника. Население этих стран находилось на столь низкой ступени развития, что ему редко доводилось видеть Квадрата, а поскольку туземцы испытывали безграничное почтение к высшим существам и неизменно наделяли их способностью исцелять различные болезни и недуги, то путешествие Ориенталиса в тех краях проходило без особых приключений. Всюду, куда бы он ни приходил, его окружал ореол искуснейшего лекаря. Каждый выздоровевший пациент умножал его славу. Если же улучшения в состоянии больного не происходило, то это приписывали действию злых духов.

Так шел Ориенталис от одного селения к другому, как вдруг его путешествие неожиданно оборвалось — он

повредил свои органы движения. Жители ближайшего селения приютили Квадрата, окружив заботой и вниманием, они сочли его волшебником, спустившимся с небес.

Ориенталис месяц за месяцем жил среди туземцев. Но мало-помалу им стала овладевать непреодолимая тоска по родине. Неужели ему суждено всю дальнейшую жизнь провести в этой невольной ссылке? Неужели его всегда будут окружать одни лишь Равнобедренные Треугольники с острыми углами при вершине и даже Неправильные фигуры? И хотя его почитали здесь богом, что значили для него все эти почести, воздаваемые жалкими, неразвитыми существами!

Наконец наступило долгожданное выздоровление. Ориенталис вновь обрел способность передвигаться. Сначала он совершал лишь небольшие прогулки по окрестностям, но затем окреп и стал делать уже основательные дневные переходы. Мысленно Ориенталис уже видел себя в кругу своих одноклубников. Он беспокоился за своего друга и досадовал, что тот не сможет получить всех полагающихся ему почестей. Вскоре Ориенталис принялся за необходимые приготовления, так как опасался, что местные жители не захотят по доброй воле расстаться с ним. Предчувствия не обманули Ориенталиса. Туземцы довольно скоро заметили, что он ведет себя странно, и раскусили его намерения. Они по-прежнему вели себя самым дружественным образом, но приставили к Ориенталису стражу, якобы для его вящей безопасности, а в действительности для того, чтобы помешать ему бежать из селения.

Когда Ориенталис заметил, что о скрытном побеге не может быть и речи, он открыто рассказал о своем намерении вождю племени. Поблагодарив вождя за гостеприимство и тщательный уход во время болезни, он сказал, что теперь выздоровел и хочет уйти.

Бургомистр селения (условимся так называть это высокое должностное лицо) без обиняков заявил Ориенталису, что у того ничего не выйдет, что он спустился с небес, дабы излечиться в селении от своей болезни, и что нет ни малейших признаков, которые свидетельствовали бы о том, что воля богов изменилась. Кроме того, бургомистр возражал против ухода великого целителя и как вождь племени,

И вот именно в ту пору, когда все шансы на побег были безвозвратно потеряны, пришло избавление, но пришло не с запада, как ожидал Ориенталис, а с востока. Соперник Ориенталиса, господин Окциденталис, пустившийся в путь в противоположном направлении, встретился с Ориенталисом в том же самом селении. Едва по поселку разнеслась весть о том, что к нему приближается еще один Квадрат, как все население охватило ликование. Навстречу новому гостю отправилась торжественная процессия с музыкой и подарками, дабы умиловить божество. Гостя провели к его коллеге, и оба соперника приветствовали друг друга самым дружеским образом. Несколько дней спустя они покинули селение и отправились дальше, на сей раз беспрепятственно.

На обратном пути оба путешественника изрядно поломали голову, пытаясь найти объяснение происшедшему с ними чуду: каким образом тот, кто отправился на запад, мог вернуться домой с востока. Они не смогли найти никакого объяснения этому и решили, вернувшись домой, предложить загадку членам клуба. Однако в день своего прибытия путешественники сочли неуместным задавать своим друзьям неразрешимые задачи и, войдя в клуб, приветствовали своих коллег простым восклицанием: «Господа! А вот и мы!» Ориенталис сделал краткое сообщение, заявив, что не он, а его друг выиграл пари, а обо всем остальном оба друга умолчали.

6. НАША ЗЕМЛЯ КРУГЛАЯ

Удивительное происшествие, случившееся с Ориенталисом и Окциденталисом, сначала породило множество бесполезных споров в стенах «Клуба Квадратов», но, когда слух о нем распространился шире, стало предметом всеобщего обсуждения. Каждый пытался дать свое объяснение чуду. В счастливый миг непонятым происшествием заинтересовался ученый мир. Один из виднейших его представителей, работавший в университете моего родного города, профессор Боллобосо, личность энциклопедических знаний, первым понял, в чем суть дела. Решение догадки он сформулировал весьма кратко: «Наша Земля круглая!»

Направление «вверх», или, как принято говорить у нас, во Флатландии, направление «на север», против силы притяжения, не для всех смертных одинаково. Если мы возьмем два отвеса и поместим их на некотором расстоянии друг от друга, то на первый взгляд может показаться, будто они указывают параллельные направления. Однако в действительности это не так: оба направления передекаются в некоторой точке, удаленной от того места, где мы находимся, на довольно большое, но конечное расстояние. Эта точка называется центром Земли.

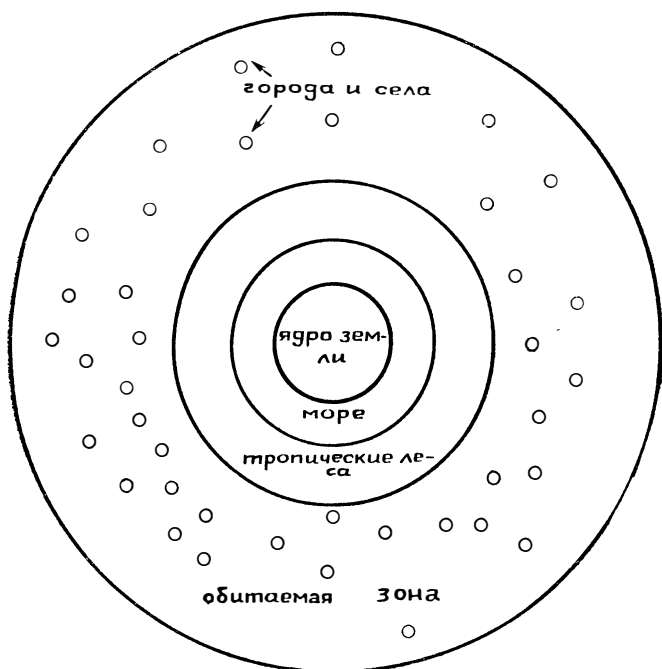
Наша Земля круглая! На юге находится твердое каменное ядро, вокруг которого простирается море (или Мировой океан). Затем идет атмосфера. Двигаясь от центра Земли, при входе в атмосферу мы прежде всего попадаем в зону тропических лесов. После тропических лесов идет обитаемая зона, в которой находятся различные города и селения, где живут цивилизованные и отсталые народы.

Может быть, обитатель Трехмерия захочет сравнить нас с птицами, поскольку мы обладаем способностью свободно перемещаться в атмосфере в любом направлении, какое только может быть в нашем двумерном пространстве. Однако такое сравнение было бы неверным, поскольку нам в отличие от птиц, чтобы передвигаться в слабом поле, создаваемом силой притяжения, не нужны крылья. В мои намерения не входит объяснение того, каким образом флатландцы перемещаются в горизонтальном (с запада на восток) и в вертикальном (с севера на юг) направлении. Тем, кого это заинтересует, я рекомендую обратиться к трудам по биологии.

Другой ученый, профессор Ньютон, открыл, что существование сил притяжения обусловлено действием ядра Земли. Сосредоточенная в ядре огромная масса притягивает все живые и неодушевленные тела. Именно поэтому капли дождя всегда падают вниз, по направлению к ядру, и образуют море. При испарении влаги водяные пары снова попадают в атмосферу. Под влиянием разнообразнейших обстоятельств они сгущаются и образуют облака, а из облаков может идти дождь. Так происходит в природе круговорот воды.

Разумеется, сразу же возникает вопрос, почему не

все предметы падают вниз. Твердые предметы, дома и различные сооружения, а также растения, отдельно стоящие деревья и деревья в лесу, остаются на своих



Наш круглый мир. Самая большая окружность условно изображает границу атмосферы. В действительности эта граница размыта.

местах и не обнаруживают ни малейшей склонности падать вниз. Ответить на этот вопрос отнюдь не просто.

Возможно, лучше всего рассматривать незыблемость домов и деревьев как закон природы. Однако нельзя не упомянуть о множестве вполне серьезных научных теорий, разработанных для объяснения этого явления. Современные представления ученых о неподвижности твердых предметов настолько сложны, что разобраться в них вы сможете, лишь затратив известные усилия.

Наши ученые считают, что твердые предметы опираются на некое пространство, параллельное нашему миру. Таким образом, наши твердые предметы опираются на некую плоскую поверхность, такую же плоскую, как мир, в котором мы живем. Должен заметить, что понять эту гипотезу (а то, о чем я вам сообщил, — не более чем предположение) неспециалисту очень трудно, хотя для обитателя Трехмерного Пространства она выглядит менее странной, чем для нас. Учитывая все это, мы в дальнейшем будем просто констатировать, что деревья и дома во Флатландии стоят неподвижно на своем месте (поскольку никто не сомневается в том, что это действительно так).

Ученый мир очень быстро воспринял новую теорию о том, что наша Земля круглая, но широкой публике, далекой от науки, понадобилось много времени, прежде чем она смогла поверить в открытие профессора Боллобосо. Люди никак не могли понять, каким образом каждый, кто, выйдя из дома на запад и никуда не сворачивая, в конце концов вернется к себе домой с востока. Некоторые даже сомневались, так ли это, и спрашивали, не вздумали ли Ориенталис и Окциденталис подшутить над всеми, а если все действительно обстоит так, как они рассказали, то не существует ли более простого объяснения. Тем временем ученые не сидели сложа руки и на опыте доказали, что две отвесные линии, проведенные в разных местах нашей Земли, не вполне параллельны. Самые широкие круги флатландского общества начали поговаривать о повторных кругосветных путешествиях как о чем-то заурядном и вполне обыденном. Очень скоро кругосветные путешествия утратили свою исключительность и превратились в обычные рейсы. Их стали регулярно совершать и в восточном, и в западном направлениях.

И все же одна проблема по-прежнему оставалась нерешенной. Сводилась она к следующему: существует ли у атмосферы резкая внешняя граница или атмосфера становится все более и более разреженной и простирается до бесконечности? Объяснения, даваемые на сей счет учеными, были противоречивы и никого не удовлетворяли. Все попытки совершить путешествие на север наталкивались на непреодолимые трудности. Атмосфера там оказывалась слишком разреженной, для того чтобы

в ней можно было дышать, и это обстоятельство исключало надежды на успех экспедиций в северные страны. Хотя спортсмены со специальным снаряжением предприняли несколько серьезных попыток проникнуть в недоступные северные области, по возвращении они смогли сообщить немного: атмосфера по мере подъема к северу становится все разреженной, а обозримая область Земли — все шире.

Историческим событием стало путешествие Аэросальты, молодой спортивной дамы. Движимая любовью к сенсациям в надежде снискать себе славу, она решила послужить науке. Последнее ей вполне удалось, но и наука также не осталась в убытке.

Из книг Аэросальта вычитала, что двигаться в верхних слоях атмосферы невозможно, поскольку там мало воздуха, а последний, как вы, несомненно, должны знать, необходим нам при движении. Наш организм в состоянии переносить пребывание в этих разреженных слоях атмосферы и некоторое время оставаться в безвоздушном пространстве, но наши двигательные функции при этом, так сказать, выключаются. И вдруг появляется воздушная акробатка и заявляет о своем намерении подняться в самые верхние слои атмосферы при помощи специально построенной для этой цели катапульты.

Аэросальта начала свои тренировки с малых высот. Сначала она двигалась медленно, но с каждым разом увеличивала скорость. Нельзя сказать, чтобы эти пробные рейсы были совсем безопасными. Хотя Аэросальта проводила свои тренировки вдали от городов, все же однажды ничего не подозревавшие путники едва не стали жертвой задуманного ею предприятия: столкновение с «летающей женщиной» едва не привело к смертельному исходу. К счастью, все закончилось благополучно. Аэросальта со свистом пронеслась между путниками, которые попадали со страху. По нелепой случайности путники оказались группой знатных вельмож, направлявшихся в соседнюю страну с дипломатической миссией. Эти важные господа решили, что на их жизнь совершено покушение. Тотчас же было произведено расследование, и ко всеобщему облегчению установили, что злого умысла не было и в помине. Однако, чтобы исключить подобные случайности, был введен строгий запрет

на полеты. Против легкомысленной Аэросальты возбудили судебное дело. Ей угрожала смертная казнь.

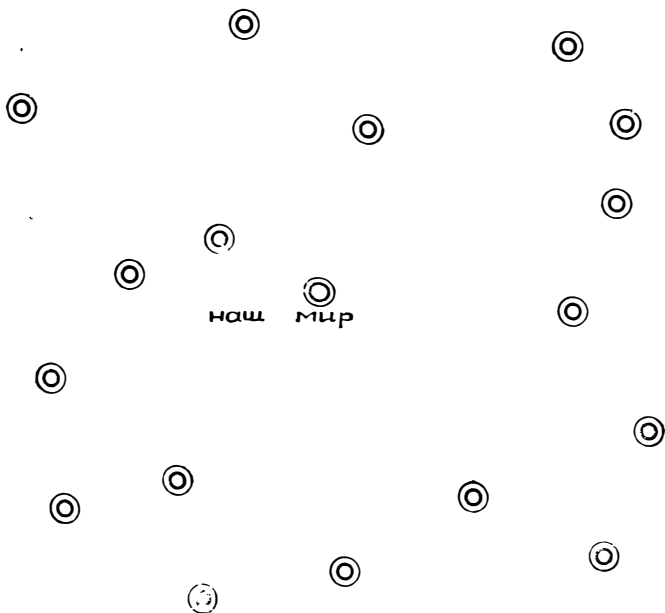
На счастье, суд отнесся к Аэросальте великодушно и был склонен ограничиться пожизненным заключением. Адвокат взывал к милосердию судей и произнес длинную речь в защиту обвиняемой. При этом он как бы по рассеянности прикасался то к одной, то к другой детали катапульты, стоявшей в зале суда в качестве вещественного доказательства. Под испуганными взглядами судей адвокат навел аппарат (который он между тем успел зарядить) в цель. В тот же момент его подзащитная вспрыгнула на катапульту, адвокат, сделав устрашающее движение, нажал на спуск, и Аэросальта, словно выпущенная из лука стрела, устремилась в пространство.

Все замерли от неожиданности. Стражники бросились на розыски беглянки, но, увы, напрасно. Как заявил адвокат (а в правдивости его слов никто не усомнился, поскольку доверие к адвокату — один из основных принципов нашего правосудия), все произошло непреднамеренно, в силу случайного стечения обстоятельств. Правда, как ни странно, направление выстрела оказалось очень тщательно рассчитанным. Воздушная путешественница пролетела между домами и деревьями и опустилась на большом расстоянии от зала суда в лесу, где между деревьями «совершенно случайно» была натянута прочная сетка.

Поскольку об этих подробностях судьи, естественно, не знали, а адвокат, судя по его внешнему виду, был не менее перепуган происшедшим, чем они, то никаких подозрений в отношении защитника Аэросальты у вершителей правосудия не возникло. Аэросальту заочно приговорили к смертной казни, а ее катапульту подлежала конфискации и уничтожению.

Был ли приведен в исполнение приговор суда, мне не известно. Однако точно установлено, что вскоре после происшествия в зале суда в одном из безлюдных районов Флатландии возобновились тренировочные полеты из катапульты со спуском на специальную сетку. Когда Аэросальта сочла себя достаточно подготовленной, она вместе со своими помощниками, в число которых входил и адвокат, ставший к тому времени ее мужем, перебралась выше, как можно дальше на север, и достигла гра-

ницы, где живые существа еще могут находиться в безопасности. В один прекрасный день, когда состояние атмосферы было особенно благоприятным, Аэросальта решилась на прыжок. Катапульта была направлена строго на север и заряжена до отказа. Аэросальта заняла свое место, ассистенты по ее сигналу нажали спуск, и она унеслась вверх, навстречу неизвестности.



Наше пространство заполнено мирами. Наш круглый мир — лишь один из них.

Как рассказывала впоследствии сама Аэросальта, со всех сторон ее окружил свет. Туман рассеивался все больше, и вскоре она могла уже вполне отчетливо различать даже отдаленные предметы. Глубоко внизу под собой Аэросальта увидела обитаемый мир. Это было захватывающее зрелище!

Но когда она взглянула вверх, глазам ее открылась поразительнейшая картина, которую ранее не доводилось видеть ни одному живому существу! Небосвод не был пуст. На большом удалении во многих направлениях

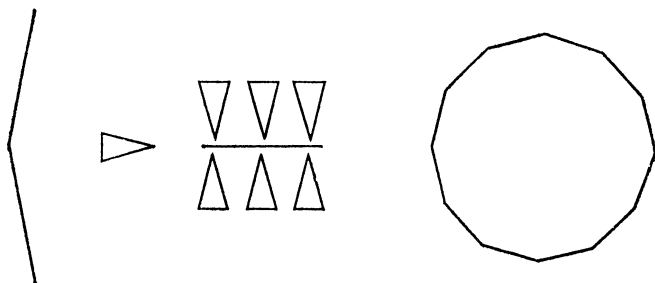
виднелись другие миры! Одни были расположены ближе, другие дальше, третьи совсем далеко.

При возвращении в обитаемый мир Аэросальта встретила восторженный прием. И хотя сердитые судьи настаивали на свершении правосудия, общественное мнение было решительно против, а ученый мир дал понять, что ни о каком приговоре не может быть и речи. Верховный жрец также выступил против принципа «Пусть погибнет мир, но да свершится правосудие».

Открытие Аэросальты, ставшей всемирной знаменитостью, получило всеобщее признание. Теперь все знали, что в нашей Вселенной имеется множество миров и наша круглая Земля — лишь один из них. Обитаемы ли другие небесные тела, неизвестно. Мы можем лишь строить на этот счет догадки. Чтобы добраться до новых миров, у нас нет подходящих средств. Может быть, позднее, когда достижения науки позволят преодолевать пустое пространство, мы сумеем побывать на других небесных телах.

7. ВЕЧЕР НАКАНУНЕ НОВОГО ГОДА

Был канун Нового года. Я сидел в кругу семьи и рассказывал внукам сказку о Белоснежке и семи гномах. Взрослые также прислушивались к нам. Я говорил



Белоснежка и семь гномов.

о том, каким прекрасным тоненьким Отрезком прямой была Белоснежка. Мачеха ее в юности также отличалась изяществом и красотой и, став старше, сумела сохранить стройность фигуры. Однако Белоснежка в красоте превзошла свою мачеху и по толщине, и по длине.

Тут меня перебила внучка. Ей требовалось узнать, каким образом мачеха могла с легкостью превращаться в ведьму. Я ответил, что эта женщина умела искусно изгибать свое тело и при этом превращалась в безобразное страшилище. Внучку мое объяснение вполне удовлетворило.

Затем моему самому младшему внуку захотелось узнать, сколько сторон было у принца. Это был трудный вопрос. В старых сказках у принцев и королей чаще всего не более шести-восьми сторон. Но если у самих детей число сторон достигает восьми, то принц для них никак не может быть шестиугольником. В то же время, если сказать, что у принца сорок восемь сторон, то в глазах детей он окажется довольно смешной фигурой, поскольку будет сильно походить на жреца. И я решил в данном случае наделить принца двенадцатью сторонами.

Когда сказка кончилась, долгое время все молчали. Потом мой старший внук попросил меня рассказать еще что-нибудь.

— Какую сказку ты хотел бы услышать? — спросил я.

— Зачем сказку? — удивился внук. — Расскажи нам лучше что-нибудь о нашем мире, о путешествии Аэро-сальты и о тех чудесах, которые она увидела.

Эта просьба была мне особенно приятна. Мой внук впервые проявил интерес к научным проблемам. Поэтому я охотно рассказал об отважных путешествиях наших первооткрывателей и чудесах, открытых ими на небе. В заключение я заметил:

— Мы не можем с уверенностью ответить на вопрос, есть ли жизнь на других небесных телах. Наши телескопы недостаточно сильны для этого, тем более что небесные тела окружены плотной атмосферой. Весьма сомнительно, что там есть мыслящие существа, похожие на нас, то есть Треугольники и Правильные Многоугольники.

Тут в разговор неожиданно вмешалась жена одного из моих сыновей:

— Может быть, на других небесных телах женщины имеют форму окружности, а мужчины по виду напоминают линии, изогнутые в виде цифры «три».

Поднялась буря протестов. Само предположение о том, что где-то во Вселенной женщины могут иметь форму, которая у нас почитается благороднейшей и является достоянием одних лишь мужчин, в то время как мужчины по внешнему виду неотличимы от наших преступниц, изогнутых в форме тройки, мои сыновья сочли неслыханной дерзостью.

Но моя сноха была права. Я объяснил своим сыновьям, что на других небесных телах формирование внешнего вида их обитателей может подчиняться совсем иным законам природы, чем у нас, и не исключено, что там самыми благородными существами считаются Неправильные фигуры!

Это замечание также вызвало кучу возражений. Мои юные слушатели могли еще представить себе, что на других небесных телах обитают страшные ящеры, карлики или великаны, мирились с существованием миров, населенных одними лишь Окружностями, но не допускали и мысли, что где-то Неправильные фигуры считаются вполне приличными существами.

Пробило десять часов — время, достаточно позднее для детей. Поздравив всех с наступающим Новым годом, младшее поколение отправилось спать. Остальные члены семьи также разошлись по своим комнатам, и я остался вдвоем со своим старшим сыном.

Долгое время мы сидели молча, задумчиво глядя в огонь. Неожиданно мой сын спросил:

— Отец, существует ли в действительности треть измерение, о котором наш предок написал свою книгу?

— Что ты имеешь в виду? — попытался уточнить я.

— Я хочу сказать следующее: существует ли в действительности трехмерное пространство со столь удивительными существами, как Сфера и Куб, или все это не более чем научная фантастика?

В книге моего прадеда я прочитал, что его посетила Сфера, существо из трехмерного пространства. Не сохранилось ли каких-нибудь доказательств этого визита?

Я ничуть не сомневаюсь в том, что мой прадед написал книгу о действительно состоявшемся визите Сферы, но нельзя же целиком полагаться лишь на его собственный рассказ об этом событии. А что если вся его книга — сплошной вымысел. Разумеется, ничто не мешает нам мысленно представить себе третье направление, пер-

пендикулярное двум известным нам направлениям, но существует ли это третье направление только в нашем воображении, представляя интерес и имея значение лишь для философов, или оно обладает некоторой реальностью?

Что я мог ответить своему сыну? Сам я всегда считал рассказ моего деда абсолютно правдивым и никогда не сомневался в его истинности, но не мог не согласиться с тем, что объяснения в нем не мешало бы подкрепить более вескими доводами. У меня в голове не укладывалось, как во имя каких-то вымышленных представлений, лишенных какой бы то ни было реальности, можно до конца жизни оставаться в тюрьме и встретить там смерть.

— Послушай,— продолжал мой сын,— мы можем представить себе Лайнландию, где все обитатели — это длинные или короткие отрезки, расположенные на одной и той же прямой, которая и служит их Вселенной. Эти отрезки могут двигаться вперед и назад, но только вдоль прямой. Такой лайнландец может представить себе одно измерение, но если заговорить с ним о втором направлении, перпендикулярном тому миру, в котором он живет, то лайнландец просто не поймет, о чем идет речь. Будь наш лайнландец гениальным ученым, он мог бы, пожалуй, путем умозрительных построений продвигнуться настолько, чтобы проследить за следующим рассуждением. Если точка проходит конечное расстояние вдоль некоторой прямой, то она описывает отрезок, концами которого служат две точки. Если теперь мы станем перемещать отрезок конечной длины в перпендикулярном ему направлении на расстояние, равное его длине, то получится квадрат, имеющий четыре вершины и ограниченный четырьмя сторонами.

— Не думаю, — прервал я своего сына, — чтобы твой лайнландец мог понять эту часть твоих рассуждений. Ведь ему не известно, что такое «перпендикулярное направление», а это понятие играет важную роль в них.

— Согласен, но должен заметить, что мой лайнландец — не более чем плод воображения. В Лайнландии подобного гениального ученого нет, да и не может быть. Нельзя ожидать, что столь примитивные существа, как лайнландцы, в достаточной мере владеют геометрическими понятиями. Но мы, двумерные существа, знаем,

что означает «перпендикулярное направление», и, следовательно, наиболее разумные из нас в состоянии проследить за рассуждениями и дальше. Сделаем теперь еще один шаг и мысленно представим себе, что квадрат может перемещаться в некотором третьем направлении, воспринимать которое нам не дано. Разумом мы можем вообразить такое движение, но представить себе его наглядно не в наших силах. Итак, предположим, что квадрат, двигаясь в направлении, перпендикулярном нашему пространству, проходит расстояние, равное любой из его сторон. Тогда мы получим некое трехмерное тело — гиперквадрат, или куб. По своему строению это тело весьма правильно. У него восемь вершин и двенадцать граничных линий.

— Почему у гиперквадрата двенадцать граничных линий? — спросил я. Вопрос был задан с умыслом: мне хотелось проверить, повторяет ли мой сын сведения, почерпнутые им в книге своего прадеда, или ему удалось до конца разобраться в прочитанном и он сумеет привести аргументы, подтверждающие правильность высказанных им утверждений.

— В этом нетрудно убедиться, — последовал ответ. — У квадрата в исходном положении имеются четыре граничные линии (его стороны) и столько же граничных линий в конечном положении. Таким образом, восемь граничных линий мы уже насчитали. Кроме того, у квадрата имеются четыре вершины, каждая из которых при перемещении квадрата вдоль третьего направления опишет по одной граничной линии. Следовательно, общее число граничных линий у трехмерного тела, называемого гиперквадратом, или кубом, равно двенадцати.

— Да, у куба двенадцать ребер, как принято называть граничные линии в Трехмерии, — вставил я.

— Но самое замечательное, — продолжал мой сын, — заключается в том, что куб ограничен плоскими фигурами, квадратами. Всего таких квадратов шесть, причем каждая точка, лежащая внутри любого из шести квадратов, принадлежит наружной поверхности куба. Нам, флатландцам, трудно представить себе, что точка, лежащая внутри квадрата, в то же время может принадлежать наружной поверхности трехмерного тела, но тем не менее это действительно так. Таким образом, у куба

имеется шесть вершин, двенадцать ребер и шесть граней, все точки которых, в том числе и внутренние, принадлежат его наружной поверхности.

— Ну что же, с твоими рассуждениями нельзя не согласиться,— снова прервал я сына.— Однако теперь ничто не мешает нам продвинуться еще на один шаг вперед и мысленно представить себе то, что получится, если мы вздумаем сдвинуть куб вдоль четвертого направления, перпендикулярного трем первым.

— Получится четырехмерное тело,— сказал мой сын,— которое можно было бы назвать гиперкубом. Разумеется, мы не можем представить его себе наглядно.

— Более того, даже трехмерные существа не могли бы представить себе гиперкуб наглядно. Им не оставалось бы ничего другого, как прибегнуть к умозаключениям и выводить свойства куба путем абстрактных рассуждений — так же, как мы рассуждаем о кубе, будучи не в силах представить себе его наглядно. Позволил ли мне спросить, какими элементами ограничен такой гиперкуб?

— Прежде всего ясно, что у гиперкуба шестнадцать вершин, поскольку у куба имеется восемь вершин в исходном и столько же вершин в конечном положении. Восемь и восемь как раз дает шестнадцать вершин.

— А сколько у гиперкуба ребер?

— Тридцать два.

— Почему?

— У куба в исходном положении двенадцать ребер, и столько же ребер у куба в конечном положении. Таким образом, двадцать четыре ребра мы уже насчитали. Кроме того, каждая из восьми вершин куба, двигаясь, опишет отрезок прямой, который также служит ребром гиперкуба. Следовательно, всего у гиперкуба имеется тридцать два ребра.

— А сколько у гиперкуба плоских граней?

— Двадцать четыре: шесть граней у куба в исходном положении, еще шесть — у куба в конечном положении, и каждое из двенадцати ребер при движении также замещает по одной грани. Вот всего и набирается двадцать четыре грани.

— Ты перечислил все элементы гиперкуба?

— Нет, самое главное впереди. Гиперкуб ограничен восемью кубами. Каждая из граней исходного куба при

движении породила по одному новому кубу. Вместе с кубом в исходном и кубом в конечном положении мы получаем всего восемь кубических граней. Таким образом, гиперкуб ограничен восемью кубами, все точки которых, в том числе и внутренние, лежат на наружной поверхности гипертела. Разумеется, представить себе наглядно, как это происходит, мы не в состоянии.

— Трехмерные существа также не в силах представить себе такую картину.

— Мы вполне могли бы продолжить наши рассуждения, — заметил мой сын, — и заставить гиперкуб перемещаться вдоль пятого направления, но какое тело при этом получится, представить себе даже мысленно довольно трудно.

— Почему? — возразил я. — Мы получим пятимерное тело, обладающее весьма правильным строением, с тридцатью двумя вершинами, восьмьюдесятью ребрами, восьмьюдесятью плоскими, сорока кубическими и десятью гиперкубическими гранями. Правда, я не могу не согласиться с тем, что чем дальше, тем сложнее будут получаться гипертела.

Мы оба замолчали и погрузились в размышления. Я был горд своим сыном, который так хорошо разбирался в многомерной геометрии — отрасли науки, которой занимались многие члены нашего семейства. Занятие многомерной геометрией стало своего рода семейной традицией в честь нашего великого предка, замечательного Квадрата.

Мой сын первым нарушил молчание:

— В настоящее время мы не можем ответить на вопрос, является ли все это чистой гипотезой, игрой разума, или третье измерение действительно существует. Посетила ли моего прадеда Сфера или весь рассказ о ее визите от начала до конца был плодом его фантазии?

Тогда мы еще не знали, что ответ на этот вопрос будет дан очень скоро.

8. ВОЗВРАЩЕНИЕ СФЕРЫ

Часы пробили полночь, и великий миг, которого каждый год ожидают с нетерпением, настал. Может быть, вам покажется странным, что моя семья в новогоднюю ночь не собралась в тесном кругу у очага. Дело в том,

что мои домочадцы, следуя примеру детей, решили лечь спать пораньше. Поэтому мы сдвинули торжество на несколько часов и уже успели отпраздновать встречу Нового года. По обычаю, мы отведали окружности на масле — блюдо, считавшееся большим лакомством у детей, которое с удовольствием ели и взрослые. Затем я рассказал сказку, так что, по нашему мнению, встреча Нового года прошла вполне удачно. Что же касается детей, то для них это был настоящий праздник.

Разумеется, мы, взрослые, могли бы собраться в полночь еще раз, но заранее условились не делать этого. Ведь момент, когда Новый год сменяет старый, выбран совершенно произвольно и зависит лишь от принятого у нас способа измерения времени и нашего летоисчисления. Никаких перемен для того, чтобы выделять этот момент времени среди других или приписывать ему особое значение, в природе не существует.

Итак, по известным теперь вам причинам мои домочадцы разошлись из-за стола, а я остался, чтобы посидеть у очага и побеседовать со своим старшим сыном о третьем измерении. И тут это случилось. Я хочу сказать, что мне вдруг послышался какой-то странный звук, шорох или тихое гудение. Откуда он доносился, я не мог никак понять и вопросительно посмотрел на сына.

— Тебе что-нибудь послышалось? — сказал он.

— Да, но что это? — спросил я.

— Трудно сказать. Не понимаю, откуда доносится звук.

— Я тоже, — пришлось признаться мне.

Звук стал явственнее и быстро смолк. Между мной и сыном появилась какая-то точка, которая начала быстро увеличиваться в размерах. Нет, это была не точка, а растущая на глазах окружность. Спустя какое-то время она стала уменьшаться, сначала медленно, а затем все быстрее и быстрее. Наконец она стянулась в точку и исчезла совсем.

Мы с сыном смотрели друг на друга, потрясенные, но не испуганные.

— Это была Сфера, — промолвил сын.

— Думаю, что так, — согласился я.

— Значит, все-таки... — начал было он, но не закончил.

— Да! — сказал я. — Существование Трехмерия — не гипотеза, а реальность. Мой дед действительно познакомился с реально существующей Сферой.

До нас донесся таинственный голос:

— Я возвращаюсь. Я — Сфера, только что прошедшая насквозь вашу плоскость. Смотрите! Сейчас я пройду сквозь нее еще раз в обратном направлении.

И действительно, мы снова увидели точку. Она стала расти и увеличиваться в своих размерах до тех пор, пока не превратилась в окружность — наибольшее сечение Сферы нашим двумерным миром.

Какое-то мгновение мы молчали. Но тут я подумал, что мне необходимо приветствовать высокого гостя, и сказал:

— Добро пожаловать, ваше превосходительство, в наш мир двух измерений.

— Здравствуйте! — ответила Сфера. — С Новым годом, с новым счастьем!

— Спасибо, желаем и вам того же! — поблагодарил я.

— Вы внук того самого Квадрата, с которым мне довелось познакомиться прежде? — поинтересовался мой гость.

— Да, того самого! — ответил я, весьма польщенный. — Не могу не выразить свое восхищение умом вашего превосходительства: вы сумели отыскать меня среди многих тысяч Шестиугольников, обитающих в нашем мире.

— Да, это было не просто. Пришлось даже заняться подслушиванием разговоров между флатландцами. Из них я поняла, что у вас теперь к третьему измерению относятся совсем иначе, чем прежде. Из него не делают больше тайны. Наоборот, нынче каждый рассуждает о третьем измерении, хотя ничего в нем не смыслит.

— Это вы верно изволили заметить, — согласился я. — Теперь, так же как и во время вашего прежнего визита, вы могли бы показаться публике, но с одним весьма существенным различием: ныне вас провозгласили бы героем!

— Вполне возможно, — сказала Сфера, — но я еще не решила, как мне быть. Кроме того, для подобной демонстрации время еще не настало: ведь с тех пор, как

я нанесла свой последний визит во Флатландию, еще не минуло тысячи лет.

— Да, это так,— подтвердил я и добавил: — А что привело вас сейчас в наш мир? Мы весьма рады вашему визиту и очень ценим ваше внимание.

— Мой нынешний визит объясняется чрезвычайно просто: я почувствовала непреодолимую потребность побывать еще раз во Флатландии. В прошлый раз я выполняла приказ свыше. Мне было поручено нанести официальный визит в Двумерие, чтобы показать вам, флатландцам, ограниченность вашего мира.

— А на этот раз? — спросил я.

— На этот раз мне хотелось бы сделать все, что не удалось выполнить во время моего прошлого визита. Я несколько постарела. Мы, Сферы, живем у себя в Трехмерии гораздо дольше, чем обитатели Флатландии, но мне не суждено дожить до следующего века. С каждым днем я дряхлею, а у меня на душе лежит некий груз, поэтому я и решила нанести свой визит вам, именно вам, а не кому-нибудь другому.

— Вы можете рассказать нам лишь то, что сочтете необходимым,— успокоил я своего гостя.

— Если вы хотите поговорить с отцом с глазу на глаз, то я могу выйти,— вмешался в разговор мой сын.

— Вы мне ничуть не мешаете,— последовал невозмутимый ответ,— у меня нет от вас секретов. Можете остаться и слушать. Из вашего разговора я поняла, во-первых, что судьба столкнула меня с потомками того самого Квадрата, которому я в свое время открыла чудеса Трехмерия, и, во-вторых, что вы оба придаете немаловажное значение проблемам геометрии. Поэтому я надеюсь, что вы со вниманием выслушаете мои признание и с сочувствием отнесетесь к рассказу о происшедших со мной событиях.

— Мой сын и я выслушаем вас с величайшим удовольствием,— заверил я высокого гостя.

— Коль скоро вы читали книгу, написанную вашим дедом и прадедом (кстати сказать, она была издана и у нас, в Трехмерии, где ее прочитал каждый, кто интересуется свойствами пространства), то, должно быть, помните,— начала Сфера свой рассказ,— что сначала я пыталась доказать вашему предку, Квадрату, существование третьего измерения при помощи некоторых

наглядных демонстраций, но затем, видя, что мне никак не удастся полностью убедить его, я захватила Квадрата с собой в Трехмерие, откуда он смог взглянуть на свой собственный мир.

— Об этом мы вполне осведомлены,— подтвердил я.

— Тогда вам, по-видимому, известно и другое. Ваш дед и прадед все время пытался убедить меня в том, что по аналогии с уже существующими мирами мы можем сделать еще один шаг и прийти к заключению о существовании четырехмерного мира. Тогда я и слышать не хотела о четырехмерном мире и, когда мой собеседник стал упорно настаивать на своей правоте, возвратила его назад на плоскость, а сама скрылась.

Последовала довольно продолжительная пауза. Мой сын и я хранили молчание. Интуитивно мы чувствовали, что нам не следует прерывать Сферу прежде, чем она кончит свое признание. Наконец Сфера собралась с силами и продолжила свою исповедь.

— Вопрос, заданный мне Квадратом, с его точки зрения был вполне обоснованным и разумным. Ему, только что познавшему существование нового, ранее не известного измерения, предположение о существовании четвертого измерения казалось совершенно естественным и очевидным, для меня же оно звучало явной нелепостью. Впрочем, мое отношение к словам вашего деда и прадеда вполне понятно: ведь мне никогда не приходило в голову переживать ничего подобного.

Квадрат спросил меня, не сохранились ли в летописях Трехмерия упоминания о появлении существ более высокого порядка, обладавших способностью проникать в закрытые помещения. Следует признать, что в исторических хрониках встречаются сообщения о подобных фактах, но такие явления было принято считать галлюцинациями, возникающими в мозгу при чрезмерном заострении угла при вершине. Теперь я думаю об этом иначе.

Наш гость снова замолчал, и я не удержался от того, чтобы не задать Сфере вопрос, не посетило ли ее какое-нибудь четырехмерное существо.

— Мне нанесла визит Гиперсфера,— ответила она,— существо из царства четырех измерений, столь же странное для меня, как и я для вас.

— Пожалуйста, расскажите нам подробно об этом,— попросил я.

И Сфера поведала нам удивительную историю о том, как ей довелось увидеть четырехмерное существо. Нам, принимавшим у себя в двумерном пространстве Сферу, происшествие это не показалось столь странным.

По словам Сферы, она однажды сидела совсем одна у себя в комнате, когда неожиданно послышался странный шум и перед ней возникла точка. Все окна и двери в доме были закрыты. Точка начала расти и увеличиваться в размерах. На глазах изумленной Сферы она превратилась в крохотный шарик, затем в большой шар, после чего начала постепенно уменьшаться и, превратившись снова в точку, исчезла.

Что же случилось? Гиперсфера прошла сквозь трехмерный мир, в котором обитал наш гость. Подобно тому как сечение трехмерной сферы плоскостью имеет форму окружности, сечение четырехмерной сферы трехмерным миром имеет форму трехмерной сферы. Подобно тому как мы можем наблюдать лишь сечение Сферы, то есть окружность, сама Сфера может наблюдать лишь сечение Гиперсферы своим пространством, то есть трехмерную сферу.

Гиперсфера продемонстрировала несколько удивительных трюков. Нежнейшим прикосновением она даже дотронулась до желудка Сферы, ибо перед обитателями Гиперпространства Трехмерие столь же открыто, как Флатландия перед обитателями трехмерного пространства. Странный посетитель Трехмерия мог без труда описывать до мельчайших подробностей предметы, находящиеся в закрытом ящике.

Затем Сфера рассказала еще об одном трюке, который для нас, флатландцев, остался совершенно непонятным. Чтобы закрепить предметы, в Трехмерии пользуются веревками и цепями. Вережки при этом завязывают в узлы. По словам Сферы, невозможно развязать веревку, если кто-нибудь держит оба ее конца (мы, флатландцы, не в состоянии представить себе, как это происходит, и потому всецело полагаемся на утверждение Сферы). Гиперсфера играючи развязывала любые узлы!

Другой предмет, о котором я только что упомянул, трехмерная цепь, представляет собой набор из нескольких звеньев, имеющих форму окружностей или эллипсов и соединенных между собой. Рассыпать цепь на отдельные звенья, не разогнув при этом хотя бы одно звено,

в трехмерном пространстве невозможно. Гиперсфера с величайшей легкостью рассыпала на звенья любые цепи, не разрывая ни одного звена!

Затаив дыхание, слушали мы рассказ нашего гостя. Его визит был важен для нас по двум причинам. Во-первых, мы узнали, что сообщение деда о его потустороннем госте — не выдумка. Во-вторых, наш гость сообщил нам о том, что, помимо третьего, существует еще и четвертое измерение. Однако наибольшее удовлетворение нам доставило признание Сферы, к которой мы испытывали глубокую симпатию, что она изменила свои взгляды на существование четырехмерного пространства.

Мрачным тоном Сфера сообщила нам, что обитатели Трехмерия отнеслись к ее рассказу о посещении Гиперсферы с недоверием. И хотя Сферу не преследовали и не бросили в тюрьму, ей пришлось выслушать немало насмешек. Поговаривали, что визит Гиперсферы ей, должно быть, приснился.

Такое недоверие явно печалило Сферу, и мы, вспоминая испытания, выпавшие на долю нашего предка, не могли не посочувствовать ей.

— Мне особенно приятно отметить, — прервал я грустные размышления Сферы, — что в моем доме вы встретили дружеское отношение и сочувствие, которые тщетно пытались найти в своем собственном мире.

— Благодарю вас за эти теплые слова, — ответила Сфера. — Но, хотя мне очень дорого ваше сочувствие, я все же надеюсь, что и в моем мире отношение к существованию Четырехмерия вскоре изменится.

— Как бы то ни было, мы всегда рады вашим визитам, — заверил я.

— Друзей, способных помочь в беде, нелегко забыть, — сказал наш гость, — ибо на них можно положиться.

Сфера пообещала посетить нас еще раз в канун следующего Нового года, чтобы мы могли обменяться мнениями относительно различных проблем, связанных с пространством. Наш гость нуждался в дружеской поддержке, которой не мог обрести в своем мире.

Мы настаивали на том, чтобы Сфера посетила нас, не дожидаясь конца года, но она отдавала явное предпочтение визиту под Новый год. Сфера все еще надеялась убедить обитателей Трехмерия в существовании

четвертого измерения, а для этого ей требовалось время. Вместо того чтобы появиться перед нами в некий произвольно выбранный день и час, Сфера хотела прибыть к нам в точно установленный срок. Тем более что к тому времени могут произойти какие-нибудь новые события, заслуживающие обсуждения.

Мы сердечно простились, и наш гость покинул двумерное пространство. Видимая нам окружность стала уменьшаться в размерах и наконец совсем исчезла.

Мы с сыном еще долго сидели, обсуждая события новогодней ночи.

— И все-таки нельзя не восхищаться тем, что мы в своем двумерном мире придерживаемся более передовых представлений о пространстве, чем обитатели Трехмерия. Мой прадед Квадрат пришел ко вполне правильному выводу о существовании третьего измерения в ту пору, когда сама Сфера еще не верила в существование четвертого измерения. Ныне существование трехмерного мира ни у кого из нас не вызывает сомнений, в то время как в самом трехмерном мире широкая публика все еще сомневается в существовании четвертого измерения.

— Все это так,— не мог не признать я,— но не следует забывать, что нам помог случай. Моего деда и твоего прадеда Сфера посетила давным-давно, в то время как визит Гиперсферы к Сфере состоялся недавно.

Моему сыну не оставалось ничего другого, как согласиться. По-видимому, его мысли потекли в другом направлении, ибо немного погодя он сказал:

— Существует ли пятое измерение? Не может ли в гости к четырехмерной Гиперсфере навеститься существо еще более высокого порядка из мира пяти измерений?

— Такое событие отнюдь не исключено,— заметил я без всякого энтузиазма.— Но почему ты думаешь, что математический процесс, каковым, несомненно, является восхождение от пространств одной размерности к пространствам другой, более высокой, размерности нигде не обрывается? Ведь это означало бы, что существует бесконечно много измерений!

— Но от того, что кто-то придумал многомерные пространства, они вовсе не обязаны существовать в действительности,—возразил мой сын.

— Это вполне справедливо,— согласился я,— ибо заключение о том, что некий мир реально существует, мы вправе вывести не раньше, чем за картиной этого мира обнаружим сам мир. До того любые предположения о неизвестном мире — не более чем фантазия.

— Да, но прекрасная фантазия,— не удержался от признания мой сын.— Может быть, нам еще предстоит удовольствие познакомиться с существами, обитающими в многомерных мирах. Они же сочтут, что мы совсем примитивные организмы, и будут смотреть на нас сверху вниз.

Так мы беседовали в ту ночь допоздна. И хотя то, о чем мы говорили, было чистой фантазией и не могло дать ничего нового, мне было приятно найти в своем сыне собеседника, с которым я мог столь свободно обсуждать интересовавшие меня проблемы.

ЧАСТЬ II

КОНГРУЭНТНОСТЬ И СИММЕТРИЯ

9. ПОРОДИСТЫЕ СОБАКИ И ДВОРНЯГИ

Весь следующий год мысли мои то и дело обращались к предстоящей встрече со Сферой. Как она произойдет? Расскажет ли Сфера в своем мире о втором визите во Флатландию? Продолжает ли она совершенствовать познания своих соседей по Трехмерию в геометрии? Удалось ли Сфере найти себе слушателей или за смелые идеи, в корне меняющие привычные представления о пространстве, ее бросили в тюрьму? Если так, то Сфера не сможет прибыть к нам в назначенное время.

Однажды вечером, когда все уже спали, мы со старшим сыном беседовали о всякой всячине. Вскоре наш разговор коснулся заветной темы.

— Не думаю, чтобы Сфера томилась в темнице,— заявил мой сын.— Разве сами обитатели Трехмерия не предпринимали на протяжении многих веков попыток

убедить нас, флатландцев, в существовании большѣго числа измерений.

— Ты прав лишь отчасти,— возразил я.— Обитатели Трехмерия охотно пытаются убедить нас в существовании третьего, но отнюдь не четвертого измерения, ибо в существовании последнего они сами не уверены. Если наш друг, Сфера, была столь неосторожной, что позволила себе заговорить с обитателями Трехмерия о существовании четырехмерного мира, то она вполне могла оказаться за решеткой и мы при всем желании не в силах освободить ее из темницы.

— Как ни печально, но это так,— согласился мой сын.— Лишь Гиперсфера в состоянии освободить Сферу из заточения, причем обитатели Трехмерия бессильны помешать этому, ибо доступ в трехмерную тюрьму в четвертом направлении открыт.

— Будем надеяться, что ничего серьезного не случилось и что Сфера навестит нас в назначенный час. Даже если Сфера не сообщит нам ничего нового, мы освежим свои познания и приятно проведем время за беседой о геометрии многих измерений.

— Только вот никаких особо интересных событий, которые могли бы заинтересовать Сферу, у нас не происходило,— задумчиво произнес мой сын.— Не думаю, чтобы для нее представляла интерес история об Агате и ее собаках.

Чтобы вы поняли, о чем идет речь, я должен пояснить, кто такие «собаки», поскольку до сих пор вам никогда не приходилось слышать о существовании таких зверей.

Во времена, когда жил мой дед, звери во Флатландии практически не водились, по крайней мере домашних животных не было. Я уже рассказал о том, как в эпоху великих путешествий на юге Флатландии были открыты непроходимые девственные леса и расположенное за лесами море. В тропических лесах обитают диковинные существа, известные под собирательным названием «ящеры» (биологи различают среди ящеров множество различнейших типов, классов, отрядов и видов, причем каждая разновидность животных имеет особое значение). Еще более странные существа, которые вплоть до настоящего времени до конца не изучены, населяют море.

Собственно говоря, утверждение о том, что до великих путешествий флатландцы не были знакомы с животными, не вполне справедливо. В старинных легендах, преданиях и сказках встречаются упоминания об опасных зверях, называемых то ящерами, то волками. Известно, что в древности эти звери жили не только в южных районах, но и в более умеренном климате. Они обитали в лесах и зарослях, и пройти по лесу в те времена можно было лишь с риском для жизни.

Обычная разновидность волка представляет собой животное с одной пастью и двумя отростками, называемыми конечностями. Для чего служат эти конечности, неизвестно, во всяком случае не для передвижения. На теле волка различают два выступа. Один из выступов,



Волк.

расположенный ближе к пасти, служит глазом, другой — ухом. Волк — опасный зверь. Он может проглотить любого из нас целиком.

Предприимчивые флатландцы издавна пытались ловить волчат и выставляли их для всеобщего обозрения на ярмарках. Однако, подрастая, волки становились опасными. Тогда их сажали в прочные клетки, чтобы публика могла смотреть на хищных зверей, не подвергая себя опасности.

Отбирая среди волчат наиболее смирные экземпляры, флатландцы постепенно вывели породу животных, которые стали настолько ручными, что их можно было использовать в качестве домашних животных. Их-то и стали называть «собаками».

Собаки оказались очень послушными и преданными животными. Их спокойно можно держать в обычной жилой комнате. Спят собаки либо в углу гостиной, либо даже в спальне. Они неотлучно следуют за своим «хозя-

ином» или «хозяйкой» повсюду: на улице, в магазине или во время прогулки.

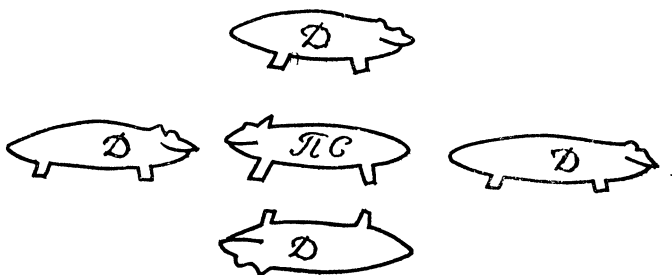
Но вернемся к Агате, моей единственной дочери, красивой девушке, стройной, как геометрическая прямая. У Агаты была собака, которая очень любила свою хозяйку. Нельзя сказать, что собственность Агаты представляла особую ценность, поскольку это была не породистая собака, а обыкновенная дворняга. Различие



Дворняга (Д) и породистая собака (ПС).

между ними заключалось не в форме (и породистая, и дворняга могут быть одинаково безобразны и одинаково изящны), а в «ориентации».

Сейчас я объясню вам, что это такое. Если я вздумаю обойти в положительном направлении любую дворнягу, то есть сначала пойду на север, затем поверну на восток, потом на юг и наконец на запад, то мне придется пройти мимо ее уха, глаза, пасти, конечностей, причем именно в той последовательности, которую я назвал. Если же я вздумаю обойти в положительном направлении породистую собаку, то последовательность



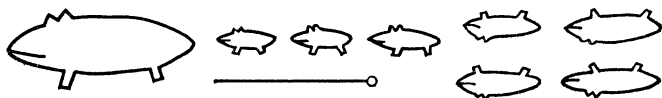
Как ни верти, как ни крути, из дворняги никогда не удастся сделать породистую собаку.

будет иной: ухо, конечности, пасть, глаз и снова ухо. Породистая собака и дворняга переходят друг в друга при отражении в зеркале. Как говорят ученые, они симметричны, но не конгруэнтны.

Как ни крути и ни верти дворнягу, вам никогда не удастся получить из нее породистую собаку. Дворняга всегда остается дворнягой. Каждая собака рождается либо породистой, либо дворнягой и остается таковой на всю жизнь.

По случайной игре природы число породистых собак в мире крайне невелико. На каждую тысячу дворняг приходится самое большее одна породистая собака. Поэтому породистых собак принято считать более «красивыми», благородными. Порой за породистых собак предлагают совершенно немыслимые суммы. Можно было бы сказать, что это противоречит здравому смыслу, но мода никогда не внимала голосу рассудка. Породистая собака редка и, следовательно, дорога. Дама, прогуливающаяся с породистой собакой,— шикарная дама. На нее обратит внимание каждый.

Собака Агаты была обыкновенной дворнягой. Агата ее очень любила, чувствовала себя вполне счастливой и, по всей вероятности, оставалась бы пребывать в этом состоянии, если бы на нашей улице не поселилась некая девушка по имени Хромоза, у которой была породистая собака. Само по себе это обстоятельство Агата перенесла бы довольно спокойно, если бы не один красивый юноша, Пятиугольник, который сначала ухаживал за Агатой, но внезапно обратил весь свой пыл на Хромозу, и только потому, что собака последней успела к тому времени принести семь щенят, трое из которых оказались породистыми. Можете представить себе, с какой гордостью шествовала по улице Хромоза в окружении целой своры породистых собак!



Хромоза со своими собаками на прогулке.

Агата была очень расстроена. Пытаясь ее утешить, я заметил было, что вряд ли стоит сожалеть о юноше, который больше смотрит на собак, чем на их владелиц, но не добился успеха. Тогда я решил сделать Агате приятное.

Я отправился к своему хорошему знакомому, некоему Равностороннему Треугольнику, у которого был по-

родистый кобель, и после некоторых переговоров добился желаемого. Правда, это оказалось дороже, чем я ожидал, и, по чести говоря, мой приятель запросил с меня несколько больше, чем следовало, но мне хотелось доставить удовольствие своему ребенку и я решил не останавливаться перед расходами. Результат не замедлил сказаться: в скором времени мой знакомый, прихватив с собой свою собаку, заглянул к нам в гости.

В напряженном ожидании прошли необходимые недели. Породистая собака — действительно редкость в наше время. Даже если оба родителя — отец и мать — принадлежат к породистым собакам, число породистых щенят в одном помете не превышает тридцати процентов, а тут еще мать — дворняга!

Наконец все стало ясно. Собака Агаты произвела на свет двенадцать щенят, но... среди них не было ни одного породистого!

Нужно ли говорить о том, как сильно была расстроена Агата. Сам я тоже был огорчен не меньше дочери. Молодой человек вообще перестал смотреть в ее сторону и вскоре женился на Хромозе. По дороге в городскую ратушу их сопровождали породистые собаки! Можно себе представить, сколько было зевак!

Агата нашла утешение в своих беспородных собаках, которым она отдала всю свою любовь.

10. КРАСНАЯ ТАПОЧКА

Снова наступил канун Нового года. Раньше всех ему обрадовались дети, с удовольствием уплетавшие окружности на масле, испеченные моей женой и снохой. Разумеется, как и год назад, дедушка должен был рассказать сказку. На этот раз я остановил свой выбор на сказке о Красной Тапочке. Дети давно ее знали, но это была очень хорошая сказка, и я решил, что не будет особой беды, если я расскажу ее еще раз, тем более что приподнятое настроение новогоднего вечера придаст сказке особую прелесть

— Красная Тапочка,— начал я свой рассказ,— была прелестной маленькой девочкой, хотя и не очень послушной. Как-то раз папа и мама подарили ей ко дню рождения красную тапочку, которая прихвлясь девочке в пору и так понравилась, что она никогда не снимала

подарок. Жители деревни, где жила девочка, прозвали ее поэтому Красной Тапочкой.

— А как девочка могла все время носить тапочку, не снимая? — спросил один из самых младших внуков, внимательно слушавший сказку.

— Маме девочки очень нравилось, когда ее дочка носила красную тапочку, вот та и не снимала ее, — пояснил я. — Почему бы девочке не носить все время красную тапочку?

— А тогда почему ты говоришь, что Красная Тапочка была не очень послушной? — захотел узнать малыш.

— Сейчас узнаешь, — успокоил я внука. — Слушай, что было дальше.

Однажды мама сказала своей дочке: «Красная Тапочка! Ты знаешь, что твоя бабушка уже давно болеет. Сейчас ей стало лучше, и я испекла для нее вкусные окружности на масле и приготовила бутылочку вина. Отнеси гостинец бабушке. Узнай у нее, как она себя чувствует, и передай, что мы все желаем ей побыстрее выздороветь».

— Хорошо, — сказала Красная Тапочка, — я так и сделаю.

— И запомни хорошенько, — добавила мама, — идти к бабушке нужно только по большой дороге, по которой ходят все. Правда, она несколько длинновата, но путь напрямик через лес опасен. И не потому, что ты можешь заблудиться, а потому, что в лесу живет волк, а это очень страшный зверь.

— Хорошо, мама, — сказала Красная Тапочка и отправилась в путь. Стояла прекрасная погода, и девочка очень радовалась, что ей предстоит самой прогуляться так далеко. Обычно в гости к бабушке она ходила с папой или мамой, но на этот раз они были заняты. Мама не могла отлучиться из дому, а папа был на работе. Отец Красной Тапочки был дровосеком и валил в лесу деревья или распиливал их на доски. Правда, дровосек из него получился неважный, потому что угол при его вершине был равен 10° , а это многовато для дровосека, но его отец и дед валили деревья, и он избрал для себя ту же профессию. Вот если бы у него родился сын с менее острым углом при вершине, то для такого сына пришлось бы подыскивать другое ремесло. Отец Красной Тапочки часто думал об этом, но ничего определенного

придумать не мог. Кроме того, не имело смысла особенно ломать себе голову раньше времени. А пока у него был лишь один ребенок — дочка, Красная Тапочка, хорошенькая девочка, которую и он, и его жена очень любили. Но, к сожалению, Красная Тапочка не всегда была послушной девочкой!

До развилки Красная Тапочка добралась быстро. Дальше большая дорога шла вокруг леса, а маленькая тропинка вела через лес, прямо к домику, где жила бабушка.

Мама строго-настрого наказывала не ходить через лес, но зачем ей, Красной Тапочке, идти окольным путем? Она часто бывала в лесу вместе со своим отцом, и волк им ни разу не встретился. Откуда ему взяться именно сегодня? Может, он вообще имеет обыкновение обедать ровно в полдень, а затем ложиться отдыхать, особенно сегодня, когда стоит такая теплая погода? И потом разве волк не испугается ее? Ведь у нее такое острое-преострое жало! Для всяких там неженков волк, конечно, опасен, ведь они и защищаться толком не умеют.

Порассуждав какое-то время таким образом, чтобы хоть как-то оправдать в собственных глазах свое непослушание, Красная Тапочка в конце концов свернула на узкую тропинку, которая шла через лес. У первых деревьев она в нерешительности остановилась. Не вернуться ли назад, пока не поздно?.. Нет, только вперед! И Красная Тапочка бросилась бежать по тропинке. Не успела она и оглянуться, как оказалась в самой гуще леса.

На бегу Красная Тапочка все же посматривала по сторонам, не покажутся ли где-нибудь дровосеки. Ведь в лесу никогда не знаешь заранее, какой зверь может выпрыгнуть из-за дерева. Но Красная Тапочка решила быть храброй.

Едва Красная Тапочка дошла до середины леса, как прямо перед собой увидела волка. Она даже не услышала, как он подкрался. Как страшно выглядел этот зверь! Он был неправильной формы и весь покрыт какими-то отвратительными выступами! Красная Тапочка очень испугалась.

— Ей надо было убежать от волка! — воскликнул один из моих внуков,

— А я бы повернулась к ней задним концом,— заметила внучка.

— Это было бы самым разумным,— похвалил ее я,— но Красная Тапочка не догадалась этого сделать. Между тем волк заговорил с ней самым сладким и льстивым голосом: «Здравствуй, девочка. Куда ты так торопишься?»

Услышав нежный голос, Красная Тапочка успокоилась, страх ее прошел. «Я иду к своей бабушке, которая живет на другом конце леса. Она заболела, и я несу ей вкусные окривости на масле, которые испекла для нее моя мама».

Дети с интересом слушали сказку. И хотя она давно была им известна, каждый раз они находили в ней что-нибудь новое для себя. Я рассказал о том, как волк предложил Красной Тапочке бежать наперегонки к домику ее бабушки, как ему хитростью удалось пробраться в домик и как сильно испугалась бабушка, увидев перед собой страшного зверя. «Причем недолго ей пришлось дрожать от страха, ибо волк тотчас же проглотил ее».

Интересно заметить, что трагическое исчезновение бабушки не произвело на детей особого впечатления. Благополучный конец сказки был им известен, и они знали, что бабушка останется живой. Мои внуки не могли только понять, как могла Красная Тапочка не разобрать, кто лежит в постели: бабушка или какое-то существо неправильной формы.

— Бабушка, бабушка,— спросила Красная Тапочка, — а где же твой стройный отрезок?

— Это все от болезни, внученька! Все мое тело стало бесформенным,— схитрил волк, притворившийся бабушкой.

Когда же Красная Тапочка поняла свою ошибку, было слишком поздно: она исчезла в желудке голодного чудовища. Но тут, к счастью, она потеряла свою тапочку.

— Почему «к счастью»? — спросил один из внуков.

— Ну это ясно,— ответила ему внучка,— ведь теперь она стала острой с обоих концов!

— Правильно,— подтвердил я.— Красная Тапочка теперь хорошо сознавала, сколь большая опасность ей

угрожает. Волк тоже понял, что, проглотив маленькую подвижную девочку, он совершил непоправимую ошибку. Когда он только заглатывал Красную Тапочку, та от испуга начала сильно дрожать, что было опасно уже само по себе. Но стоило Красной Тапочке оказаться в желудке у волка, как она принялась шнырять вперед и назад по всем направлениям, впиваясь при этом во внутренности так, что зверь взвыл от боли.

Красная Тапочка отнюдь не была уверена, что таким способом ей удастся одолеть волка. Поэтому она стала с силой совершать колебательные движения вдоль одного и того же направления. От многократных уколов в теле волка образовалась дырочка, через которую Красная Тапочка и выбралась на волю.

— А бабушка? Удалось ли ей найти отверстие в стенке желудка? — спросил кто-то из малышей, сгорая от любопытства.

— Нет, старушка не могла выбраться наружу. Ее зрение ослабело, и она так и оставалась бы в тесном желудке до тех пор, пока совсем не затупилась. К счастью, вой волка был слышен далеко, и на помощь подоспели отец Красной Тапочки и несколько лесничих. Острыми углами при своих вершинах они разрубили чудовище на части и выпустили несчастную бабушку на свет и воздух, что было весьма своевременно.

Красная Тапочка вновь натянула на себя свою красную тапочку и рассказала обо всем, что произошло. Отец девочки от радости, что его дочь жива и невредима, не стал наказывать ее за непослушание.

Я умолк. Мой рассказ особенно понравился девочкам. Разве сказка о Красной Тапочке не была сказкой о женщине? Мои дамы от мала до велика знали и любили сказки о Золушке и Белоснежке, но обе эти героини смотрели на своего принца с огромным числом сторон как на своего господина и повелителя. Что же касается Красной Тапочки, то она сама сумела найти выход из трудного положения и весьма храбро сражалась со страшным чудовищем. Таким образом, у нас имеются все основания провозгласить Красную Тапочку покровительницей женского движения.

Я не стал вмешиваться в спор, поскольку уже пробило десять часов и мне очень хотелось поскорее уложить детишек спать.

11. ФОКУС

Когда внуки отправились спать, у очага остались лишь взрослые. Мы расположились широким кругом. Кроме меня, здесь были моя жена и наши старшие дети. Вместе с Агатой пришли все ее милые собаки. Их было тринадцать: мать и двенадцать щенят. Что и говорить, многовато для одного дома! Мой второй сын, на которого собаки частенько нападали, заявлял, что держать столько собак — безумие, десять или одиннадцать из них без ущерба можно кому-нибудь отдать.

Однако всякая попытка уменьшить численность обитавшей в нашем доме собачьей своры неизменно встречала резкий отпор со стороны Агаты, а я, признаюсь честно, питал слабость к своей дочери и не желал отнимать у нее ее любимцев, хотя они и причиняли нам всем немало хлопот.

Мы ждали нашего гостя — Сферу. Хотя полной уверенности в том, что он придет, ни у кого не было, все же в глубине души каждый из нас надеялся, что визит непременно состоится. Чем меньше оставалось до полуночи, тем больше возрастало нетерпение.

— Может быть, она заболела? — спросил мой сын, не уточняя, кого он имеет в виду, но мы отлично поняли, о ком идет речь.

— А может, ее уже нет в живых, — мрачно изрек второй сын.

— Или сидит в тюрьме, — предположил третий.

Но вот охватившая всех напряженность спала: не успели часы пробить полночь, как перед нами появилась крохотная окружность. Очередной визит нашего друга, Сферы, во Флатландию начался!

Мы дали окружности спокойно вырасти до уже знакомых нам максимальных размеров. И после небольшой паузы я сказал:

— Добро пожаловать, ваше превосходительство! Мы все рады приветствовать вас как самого дорогого гостя!

— Я это знаю, — ответила Сфера, — знаю и чувствую. У вас я нахожу дружеское участие и поддержку. В моем расположении к вам вы также можете не сомневаться.

И действительно, теплый тон, которым были произнесены эти слова, достаточно красноречиво говорил о тех

дружеских чувствах, которые питала к нам Сфера. Обращаясь ко всем членам семьи, наш гость осведомился, не произошло ли за прошедший год у нас чего-нибудь достойного внимания.

Моя жена и я принялись рассказывать Сфере о всевозможных мелких происшествиях, случившихся в прошлом году. Мне в голову пришла мысль рассказать Сфере о собаках Агаты и о том огорчении, которое постигло ее, когда все щенята оказались простыми дворянами, но я все же решил не упоминать об этом происшествии, чтобы не бередить старые раны.

У Сферы также не нашлось ничего такого, о чем стоило рассказать. После нескольких замечаний, не представлявших особого интереса, наша беседа зашла в тупик. Появление Сферы на этот раз больше напоминало обычный светский визит, чем встречу на научном уровне.

Неожиданно разговор принял новое, интересное направление. Наш гость внимательно присмотревшись к одной из собачек Агаты, осведомился, уж не юного ли преступника он видит перед собой? Этот вопрос вызвал бурный приступ веселья. Чтобы Сфера не подумала, будто смеются над нею, я поспешил вмешаться и дать необходимые объяснения:

— Я понимаю, почему у вас зародилось подобное подозрение. Ведь вы знаете, что в нашем мире существа, стоящие на низкой ступени развития, имеют форму неправильных многоугольников.

Или прямолинейных отрезков, — добавила моя жена.

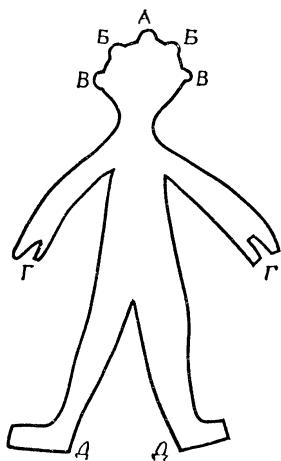
— Разумеется, — согласился я. — Как вам известно, наши женщины имеют форму прямолинейных отрезков. Менее развитые члены нашего общества — форму равнобедренных треугольников, а все неправильные фигуры — преступники. Однако те небольшие существа, которых вы видите перед собой, — всего лишь домашние животные, потомки приручаемых на протяжении многих веков диких животных, и поныне во множестве обитающих в лесах на юге Флатландии.

По-видимому, Сфера с легкостью поняла смысл сказанного, ибо ответила, что в Трехмерии также имеются существа неправильной формы, которые служат домашними животными. Сфера даже назвала несколько видов

трехмерных домашних животных: собаки, кошки, овцы, свиньи, лошади, коровы и козы.

— А у себя в доме вы держите этих животных? — осведомился мой третий сын.

— Нет, — ответила Сфера. — Все Трехмерные существа, которых я только что перечислила, использует в качестве домашних животных другая разновидность зверей — удивительные создания неправильной формы.



Фигура, которую нарисовала Сфера, чтобы мы могли представить себе, как выглядит Гомо Сапиенс: А — рот, Б — глаза, В — уши, Г — хватательные органы (называемые также руками), Д — органы движения (или ноги).

— Значит, эти создания — преступники, — констатировал мой старший сын.

— Может быть, вы и правы, — задумчиво произнесла Сфера, — хотя, по правде сказать, выглядят они иначе. Называются эти создания Гомо Сапиенс. Насколько можно судить, они довольно хорошо развиты: Гомо Сапиенс — симметричный зверь.

Чтобы мы могли представить себе, как выглядит это удивительное существо, Сфера выложила из детских кубиков, принадлежащих моим внукам, причудливую фигуру, которую все мы принялись разглядывать с большим любопытством.

— Причиняет ли это чудовище кому-нибудь зло? — спросил мой второй сын.

— Случается, что и причиняет, — ответила Сфера. — Оно считает себя вправе убивать существа, стоящие на более низкой ступени развития, и поедать их, держать их в неволе или даже искоренять по своему усмотрению.

— И такое существо — не преступник? — отважился спросить у Сферы кто-то из моих домашних.

— Само существо не считает себя таковым. У него сильно развита способность к мышлению, — ответила Сфера.

— Наверное, столь разумное существо живет в постоянном мире с себе подобными, — высказала предположение Агата.

— И это неверно, — возразила Сфера. — Существа, именующие себя Гомо Сапиенс, иногда подолгу сражаются друг с другом с большим ожесточением и немалым кровопролитием. Они собираются большими группами, и одни группы стремятся во что бы то ни стало уничтожить другие, а иногда всеми возможными способами мучают своих противников, пытаются их и убивают.

— Но тогда нельзя не признать, что Гомо Сапиенс — величайший из преступников, — произнес кто-то из нас, и все с ним согласилось. Сфера вынуждена была заметить:

— Собственно говоря, нельзя сказать, что у существ, именующих себя Гомо Сапиенс, не имеется высоких идеалов, которые они стремятся претворить в жизнь.

— И эти высокие идеалы служат оправданием совершаемых Гомо Сапиенс преступлений? — с негодованием спросила Агата.

— Да, — ответила Сфера, — у Гомо Сапиенс на все находятся оправдания. Вину за большие войны эти существа постоянно возлагают друг на друга, а когда речь заходит о преступлениях, совершенных ими самими и отрицать вину становится невозможно, они заявляют: «Я вынужден был пойти на это преступление, чтобы упредить своего противника».

— Не знаю, какие еще нужны аргументы для того, чтобы считать этих Гомо Сапиенс самыми отвратительными преступниками, — заявил мой старший сын. — Сама его форма красноречиво говорит об этом: может быть, она и симметрична, но зато чудовищно неправильна!

— А как выглядят Гомо Сапиенс женского пола? Имеют ли они форму прямолинейных отрезков? — поинтересовалась моя жена.

— Нет,— ответила Сфера.— По форме они мало чем отличаются от особей Гомо Сапиенс мужского пола.

— Как же они отличают друг друга? — последовал новый вопрос.

— Главным образом по одежде. У этих существ открыты лишь головы и хватательные органы, все остальное укутано тканью,— пояснила Сфера.

На какое-то время все замолчали. Новости стоили того, чтобы над ними поразмыслить. Первой нарушила молчание Агата. Ей не терпелось задать новый вопрос:

— Носят ли особи женского пола Гомо Сапиенс обувь?

— Обувь носят все Гомо Сапиенс, и мужчины, и женщины,— ответила Сфера.— Женская обувь обычно более привлекательна и изящна.

Это сообщение несколько успокоило Агату. Но тут один из моих сыновей спросил:

— А сколько туфель носят эти диковинные звери: одну или две?

— Две,— ответила Сфера,— по одной туфле на каждой ноге: левую туфлю на левой ноге, правую — на правой.

Этого замечания никто из нас не понял.

— Взгляните на изображение Гомо Сапиенс,— сказала Сфера,— и вы увидите, что его ноги симметричны. Они зеркально симметричны, но не конгруэнтны. Как бы Гомо Сапиенс ни крутил или ни поворачивал правый башмак, тот никогда не станет левым.

— Так же как дворняжка никогда не станет породистой собакой,— заметил по этому поводу мой второй сын.

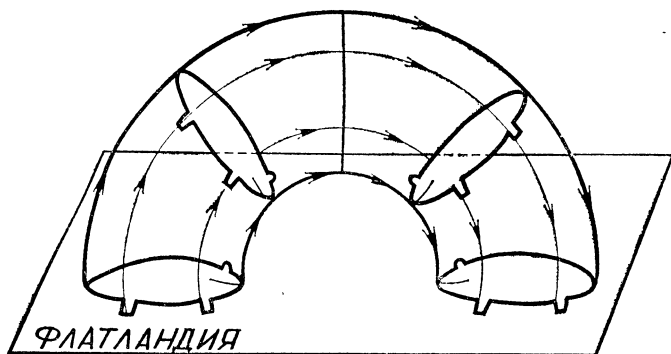
Замечание по существу было правильным, однако я счел его крайне бестактным. Ну что ему стоило привести другой пример? Глаз Агаты наполнился слезами. От Сферы, не знавшей ничего ни о породистых собаках, ни о дворнягах, смысл этого замечания, естественно, ускользнул. Тем не менее она обратила внимание на то, что все взоры присутствующих обращены на собак.

— Взгляните,— обратилась к нам Сфера,— вот перед вами две совершенно одинаковые собаки. Они конгруэнтны.

— И как бы мы их ни крутили и ни вертели, они останутся конгруэнтными,— добавил мой сын.

— Ваше утверждение справедливо лишь в том случае, если мы не станем извлекать этих собачек из пространства, выводить их из плоскости. Но если их вывести в трехмерное пространство, то изменить ориентацию собак не составит никакого труда.

Смысл последнего замечания был нам совершенно не понятен. Тогда Сфера перешла от слов к делу. Она взяла одну из собак и.... За тем, что проделала над ней



Если дворнягу повернуть в Трехмерии так, чтобы она изменила свою ориентацию, то она превратится в породистую собаку.

Сфера, никто из нас уследить не мог. Лишь потом мне стало ясно, что Сфера подняла собачку из нашего пространства, каким-то необыкновенным образом повернула ее и снова возвратила во Флатландию. Дворняга превратилась в породистую собаку!

Агата сначала замерла от удивления, а потом от радости расплакалась, схватила свою любимицу и принялась ее целовать.

Сфера решила, что моя дочь очень огорчена, и сказала:

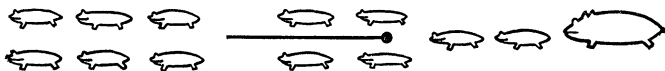
— Милая девушка, не беспокойтесь! Я сейчас верну вашу собаку в прежнее состояние.

Разумеется, Агата весьма решительно воспротивилась такому предложению. Сфера, оставшаяся в полном неведении относительно того, почему моя дочь проявляет столь сильное волнение, никак не могла понять, хоро-

шо или плохо она поступила, изменив ориентацию собаки. Я поспешил успокоить нашего гостя:

— Эту собаку вполне можно оставить в таком виде. А вот не могли бы вы проделать ту же операцию над другими собаками?

Наш гость из Трехмерия был столь любезен, что повторил свой фокус одиннадцать раз подряд, превратив всех щенят и их мать в породистых собак. Агата быстро распрощалась и ушла, боясь, что Сфера продолжит свои эксперименты. Она сослалась на то, будто ей очень хочется спать, а в действительности всю ночь не сомкнула глаз. Что скажут соседи, когда утром в первый день Нового года она отправится на прогулку вместе со всей своей великолепной породистой сворой!



Агата со своей сворой породистых собак на прогулке.

Мы еще немного поговорили о симметрии и конгруэнтности.

— Насколько я понимаю,— сказал я,— в Трехмерии проделать нечто подобное с башмаками невозможно.

— Вы совершенно правы,— ответила Сфера.— Правый башмак, как его ни крути, как ни верти, останется правым.

Тут в разговор вмешался мой ученый сын:

— Но этого же не может быть! Если извлечь правый башмак из трехмерного пространства, в котором он находится, и перевернуть его в четырехмерном пространстве, а затем вернуть в исходное пространство, то правый башмак перейдет в свое зеркальное отражение и превратится в левый башмак.

— Не представляю,— призналась Сфера,— каким образом можно это сделать.

— Разумеется, вам трудно себе это представить,— согласился мой сын,— так же как нам трудно представить, что происходит в трехмерном пространстве. Вы могли бы попросить вашего друга Гиперсферу, чтобы она показала вам такой фокус.

— Убедена, что это была бы невыполнимая задача, — возразила Сфера. — То, что возможно во Флатландии, невозможно в Трехмерии.

На этом наш гость, распрощавшись со всеми, исчез.

12. СОН О ЛАЙНЛАНДИИ

Агата была неопишимо счастлива. На следующее утро она отправилась на прогулку со всеми своими собаками. Всюду она встречала завистливые или восхищенные взгляды. Я от души был рад за нее, хотя и считал непростительной глупостью судить о ком бы то ни было по тому, какой ориентации у него собака.

Затем жизнь вошла в привычное русло и потекла без особых потрясений. Ничего сколько-нибудь интересного не происходило, и единственное, что следовало бы, пожалуй, обсудить во время предстоящего визита Сферы — это возможность изменять ориентацию двумерных предметов путем поворота их в трехмерном пространстве. Представить себе наглядно, как изменяется при таком повороте ориентация, мы, естественно, не могли, и, чтобы хоть как-то разобраться в происходящем, нам оставалось лишь мысленно перенестись в Лайнландию.

Что касается меня, то я нанес свой визит в Лайнландию во сне. Не могу сказать, чтобы это произошло случайно. Вместе с одним из гостей я провел целый день в размышлениях над проблемой изменения ориентации. Не удивительно, что и во сне меня не покидали те же мысли.

Итак, совершенно отчетливо, как наяву, я увидел во сне Лайнландию. Передо мной простиралась прямая, усеянная множеством прямолинейных существ — то длинных, то коротких отрезков. Король Лайнландии находился среди своих подданных. Справа и слева от него на прямой располагались мужчины, женщины и дети. Весело двигались они то в одну, то в другую сторону своего одномерного пространства. Покинуть прямую обитатели Лайнландии, разумеется, не могли. Они были как бы привязаны к своему столь ограниченному, но все же бесконечно большому пространству. Да, бесконечно большому, хотя все пространство и состояло всего лишь из одной-единственной прямой!

Я обратился к королю, который раздраженно воскликнул:

— Откуда этот голос? Уж не колдун ли какой-нибудь раговаривает со мной?

— Нет,— ответил я,— голос, который вы слышите, принадлежит высшему существу из двумерного мира. Мой голос доносится до вас из-за пределов вашего пространства.

— Я не верю в сверхъестественные явления,— ответил король.— Либо я сплю, либо у меня слуховая галлюцинация.

— Ни то, ни другое,— возразил я.— Просто я приближаюсь к вам, опускаюсь в ваше пространство.

И в доказательство своих слов я пересек прямую.



Король Лайнландии до и после того, как его перевернули.

— Откуда взялось это огромное существо, ведь его здесь раньше не было? — воскликнул король.— Чудеса да и только!

С этими словами король ринулся на меня. Я успел выйти из его пространства как раз вовремя, и правитель с разгона врезался в своего соседа. По-видимому, несчастному однажды уже приходилось быть жертвой бурного темперамента своего монарха, но, насколько можно судить, с такой силой он никогда еще не сталкивался с королем.

— Позвольте задать вам несколько вопросов, ваше величество,— произнес я вкрадчивым, но внушительным тоном.

Обращение «ваше величество», по-видимому, польстило королю. Монарх Лайнландии откашлялся и сказал:

— Говорите, но только покороче!

Мне не хотелось омрачать благодушного настроения, в котором пребывало их величество, и я постарался изложить свое дело как можно более наглядно.

— Ваше величество,— сказал я,— вам, несомненно, надоело на протяжении многих лет находиться на одном и том же месте в вашем пространстве и иметь одних и тех же мужчин, женщин и детей слева от себя и одних и тех же мужчин, женщин и детей справа от себя. По одну сторону от вас я вижу двух мужчин, одну женщину и трех мальчиков, по другую — одного мужчину, трех женщин и пять мальчиков.

— Все это верно, но давно известно,— прервал меня король.— Любой младенец в Лайнландии скажет вам то же самое.

— Знаю,— невозмутимо ответил я и продолжал.— А что если я сейчас переверну вас, ваше величество?

— Что означает «переверну»? — озадаченно спросил король.

— А то, что, после того как я проделаю эту операцию,— пояснил я,— с той стороны от вас, где сейчас находятся двое мужчин и одна женщина, будут находиться один мужчина и три женщины, а с другой стороны от вас, там, где сейчас находятся один мужчина и три женщины, будут находиться двое мужчин и одна женщина.

— Это невозможно,— возразил король.

— Давайте попробуем,— предложил я.— Раз, два, три... Готово!

С этими словами я приподнял короля над его одномерными владениями и, перевернув, опустил его обратно на прямую.

— Что вы со мной делаете? Сейчас же прекратите! Слышите, вы, фокусник! — потребовал король.

— Я уже кончил,— ответил я и осведомился: — Как вы себя чувствуете, ваше величество?

— Отвратительно, хуже некуда! — проворчал король.— Своими дурацкими фокусами вы растрясли мне внутренности. У меня ломота и боль во всем теле.

— Не двигайтесь, и неприятные ощущения вскоре исчезнут,— посоветовал я.

Как и следовало ожидать, боли действительно вскоре утихли, и король вновь обрел ясность мышления.

— Где я? — спросил он.

— В вашем собственном пространстве, — успокоил его я.

— В моем пространстве? В моем собственном пространстве? Хотя вы правы: существует лишь одно-един-

ственное пространство, и оно принадлежит мне. Ведь я король. Но здесь мне все совершенно незнакомо!

Не медля ни секунды, король раскрыл оба рта, которые находились у него на концах тела, и издал пронзительный вопль: таким способом он пытался установить слуховой контакт со своими подданными. Мы могли бы сказать: «Король воззвал к своим подданным». В ответ завопили все обитатели прямолинейного мира, причем каждый — двумя голосами.

— Что же все-таки произошло? Мир перевернулся! — пожаловался король. — Те из моих подданных, которые всегда находились справа от меня, переместились налево, а те, что всегда находились слева, перешли направо. Как это им удалось?

Замечание повелителя Лайнландии удивило меня. Я повернул короля относительно его же собственного мира, а он, по-видимому, ровным счетом ничего не заметил и считает, что перевернулся не он, а весь окружающий мир.

Я невольно задумался. Что ответить королю? Прежде всего мне необходимо было бы во всем разобраться самому. Я стоял недвижимо, а рядом со мной суетливо двигались то в одну, то в другую сторону обитатели Лайнландии. Различать их становилось все труднее и труднее, словно весь их крошечный мирок таял в тумане. Я проснулся и, к своему удивлению, обнаружил, что нахожусь у себя в спальне в своем собственном двуверном мире.

Над вопросом, который мне задал во сне король Лайнландии, я ломал голову довольно долго. Выбрав удобный момент, я рассказал о своих затруднениях старшему сыну и лишь с его помощью понял, что высказывания короля Лайнландии вполне естественны. Тело короля, после того как я его перевернул, расположилось на прямой в направлении, обратном исходному. Поэтому все звуки доносились до короля не с обычной, а с противоположной стороны. Голоса тех обитателей Лайнландии, которые прежде доносились до короля, так сказать, с востока, теперь сначала достигали «западного» уха и лишь затем — «восточного». Ясно, что королю показалось, будто и те, кому принадлежат голоса, переместились по другую сторону от него. Поэтому, с точки

зрения короля, перевернулся не он, а окружающий мир.

Признаюсь вам честно, что сначала объяснения сына не вполне меня убедили. Правда, мое уважение к научным познаниям собственного отпрыска и его способности здраво мыслить было достаточно велико, чтобы поверить ему на слово, и теперь у меня не осталось ни малейших сомнений в том, что он был прав. Однако, чтобы я это понял, должны были произойти другие события.

В семейном кругу мы нередко обсуждали то, о чем я уже успел вам рассказать. Стоило кому-нибудь из знакомых прийти к нам в гости, как разговор заходил об удивительных событиях, происшедших у нас в доме. Такие беседы неизменно вызывали живейший интерес у наших гостей. Поводом к ним обычно служил вопрос о том, каким образом Агате удалось стать владелицей столь великолепной своры породистых собак.

Агата хотела, чтобы на этот вопрос мы давали уклончивые ответы. Свое желание она мотивировала по-разному. Во-первых, дочь опасалась, что ценность ее собак окажется под сомнением, если станет известно, каким образом они появились на свет. Во-вторых, Агата боялась, что рецепт превращения дворняг в породистых псов, став достоянием гласности, лишит ее преимущества быть единственной владелицей великолепной своры, поскольку к нему прибегнут многие. Было, по-видимому, и третье соображение, о котором Агата никогда не говорила вслух. Именно оно и заставляло ее придавать столь большое значение сохранению тайны. Все должны думать, что ее свора стоила безумных денег. Это льстило ее тщеславию гораздо больше, чем распространение нелепых сказок о таинственном волшебнике, посетившем наш дом.

Утаивать истину претило моей открытой натуре, но, судя по недоверчивым лицам наших гостей, правдивый рассказ о метаморфозе, происшедшей с собаками, производил совсем не то впечатление, которое я ожидал. Видимо, наши гости считали, что мы хотим заставить их поверить в явные небылицы, упорно скрывая, как все произошло в действительности. Если у нас есть знаковый волшебник, появляющийся ровно в полночь под Новый год, волшебник, которого не видел никто другой, то

почему бы нам не попросить его, вместо того чтобы проделывать какие-то трюки с собаками, осыпать нас несметными сокровищами? Не потому ли, что нам не хочется открыто показывать всем, как быстро мы разбогатели? Очень все это подозрительно! Нужно ли удивляться, что о нашем семействе стали распространяться самые невероятные слухи, а на улице прохожие часто оглядывались и смотрели нам вслед. Если кто-нибудь из нас входил в зал, где находилось много народу, разговор при нашем появлении нередко смолкал. Мы чувствовали, что речь шла о нашем семействе. Даже нашего общества стали как-то избегать.

Большинство приписывало появление дорогих породистых собак черной магии. И в самом деле, кто знает, вдруг ночной гость, превративший обыкновенных дворняжек в породистых собак, был сам дьявол собственной персоной? А от тех, кто знается с самим Вельзевулом, лучше держаться подальше!

13. СЛУЧАЙ С ГОСПОДИНОМ ВЕРТАТО

Несколько месяцев спустя я случайно разговорился с одним из своих знакомых, врачом-невропатологом.

По обыкновению большинства врачей, он рассказал мне об одном интересном случае из своей практики. Речь шла о пациенте, который никогда ранее не страдал галлюцинациями. Проснувшись утром после встречи Нового года, этот человек увидел весь мир перевернутым. Он не узнал даже собственной спальни. Стол стоял не с той стороны, где обычно, дверь также оказалась не на месте. На улице он заметил, что повозки движутся задней стороной вперед, но более всего его поразили надписи: они выглядели так, словно он рассматривал их отражение в зеркале. Пациент этот, а им был некий восьмиугольник, решил, что все это ему снится или мерещится, но не тут-то было! Он чувствовал себя очень несчастным, незнакомый мир вызывал у него страх и тревогу. Каким образом все вдруг стало таким страшным и непривычным?

Восьмиугольник попытался разобраться в происшедшем. Он старался рассуждать методично и хладнокровно. Может быть, он болен, и болен серьезно? Может быть, его органы поражены какой-нибудь опасной

болезнью? Прекратив прогулку, восьмиугольник вернулся домой и улегся в постель. Закрыв глаз, он почувствовал себя вполне здоровым. Тогда он решил встать. Но стоило бедняге приподняться с постели и посмотреть вокруг, как его опять охватило странное ощущение: все выглядело так же, как обычно, и в то же время совсем иначе.

На следующее утро состояние восьмиугольника не изменилось, но и оставаться в постели он больше не мог. Однако даже пройти по собственному дому оказалось ему довольно трудно! Все предметы стояли не на своих местах. Но самое удивительное ожидало его, когда он добрался до входной двери. Улица, на которую он собирался выйти, проходила теперь вдоль другой стены дома, а дверь открывалась в противоположную сторону.

Восьмиугольник вышел на работу и начал с того, что написал срочное деловое письмо. Взглянув на это письмо, секретарша с удивлением вперила взор в своего шефа.

— Почему вы на меня так смотрите? — спросил тот.

— Я не могу прочитать то, что вы написали, — ответила девушка.

Восьмиугольник взял у нее письмо, но не обнаружил там ничего странного. Письмо было написано как обычно, и он нашел его вполне удобочитаемым. В то же время он не мог прочесть адресованных ему писем: они были написаны зеркальным шрифтом! Восьмиугольник ничего не мог понять. Может быть, он все-таки заболел? Может быть, у него какое-нибудь серьезное расстройство? Лучше всего будет, если он немедленно отправится домой. Необходимо подождать до завтрашнего утра и, если не станет лучше, вызвать врача. Он отправился домой, но на следующее утро лучше ему не стало. Не улучшилось его состояние и через день, и через неделю. С каждым днем становилось все хуже. В конце концов восьмиугольника поместили в психиатрическую лечебницу.

Я слушал рассказ своего знакомого со все возрастающим вниманием. Причина таинственного заболевания была мне совершенно ясна: восьмиугольника повернули в трехмерном пространстве.

Я высказал свою гипотезу, но мой приятель-медик не захотел ее принять, и по его насмешливой улыбке я по-

нял, что он считает меня тоже не вполне нормальным. До него, конечно, дошли слухи о нашей семье, и мой знакомый считал, что видит перед собой персону с явными признаками опасного психического заболевания.

В просьбе разрешить мне когда-нибудь посетить необычного больного мне было категорически отказано. Особенно настаивать я не решился. Все же время от времени, встречая своего знакомого, я осведомлялся о состоянии здоровья его пациента.

Тот шел на поправку. Он заново научился читать и писать и спустя некоторое время смог покинуть клинику для душевнобольных и вернуться к своей прежней деятельности.

Что касается меня, то я был полностью убежден в одном: этот случай аналогичен происшествию с собаками Агаты. Мой сын, с которым я подробно обсудил необычное «заболевание», был совершенно согласен со мной. Открытым оставался лишь вопрос о том, каким образом восьмиугольника повернули в трехмерном пространстве. Мы долго ломали голову над этим, но так ничего и не придумали. Тщательно все взвесив, мы решили, что моему сыну следовало бы нанести визит этому восьмиугольнику. Теперь нам было известно его имя. Это был господин Вертато, известный коммерсант, живший неподалеку от нас.

Нельзя сказать, чтобы визит сына оказался успешным: мы узнали не слишком много нового. Господин Вертато утверждал, что в ночь под Новый год он почувствовал себя очень плохо. Кружилась голова, мутило. Весь следующий день Вертато провел в постели и подошел к входной двери лишь завтра. Тогда-то с ним и приключилась та самая история. Вертато сообщил также, что ему пришлось заново учиться читать. Вместо обычных букв Вертато видел лишь их зеркальные отражения, а когда он учился нормально писать, то ему самому казалось, что он пишет зеркальным шрифтом. Теперь таких трудностей уже не возникает. После болезни у Вертато сохранилась способность одинаково свободно читать любые надписи, сделанные как обычным, так и зеркальным шрифтом. Но самое приятное состояло в том, что Вертато вновь обрел способность нормально воспринимать окружающее.

— Могу себе представить,— сказал мой сын,— что

вам пришлось пережить во время болезни. Весь мир казался вам чужим, или, лучше сказать, вас не покидало такое чувство, будто вы не принадлежите более к этому миру, не «вписываетесь» в него.

— Вы совершенно правы,— подтвердил Вертато.— Я чувствовал себя так, будто находился в чужой стране и был вынужден жить в незнакомом окружении. Лишь с большим трудом мне удавалось отыскать свой собственный дом, свою дверь. Я плохо узнавал своих ближних, знакомых и тех, с кем мне приходилось встречаться по работе. Понадобилось много времени, прежде чем меня сумели вылечить.

— Счастье еще, что вам удалось выздороветь,— заметил мой сын.— Не могли бы вы, господин Вертато, рассказать, как к вам вернулась способность нормально воспринимать окружающее: был ли это медленный процесс, или ваше состояние изменилось внезапно?

— Я исцелился совершенно неожиданно,— ответил господин Вертато,— и обязан своим выздоровлением музыке. Не знаю, откуда доносились звуки — с улицы или откуда-то из дома, но только вдруг они слились в знакомую мелодию, и я почувствовал себя в прежнем мире, где ничто не менялось. Гармонию звуков я воспринимал, как прежде. Но никогда еще простенькая мелодия не доставляла мне такого удовольствия. Именно в этот момент и наступил перелом в ходе моей болезни. Слушая музыку, я обрел мужество, необходимое для того, чтобы снова вернуться к жизни.

С огромным интересом выслушали мы рассказ моего сына о его визите к господину Вертато. От нашего внимания не ускользнуло, что странное происшествие приключилось с ним в новогоднюю ночь, как раз в то время, когда у нас в гостях находилась Сфера. Случайно ли это совпадение или тут кроется какая-то взаимосвязь? Над этим вопросом мой сын и я размышляли всю оставшуюся часть года.

14. ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ТРЕХМЕРИИ

Для нас, чувствовавших себя в обществе париями, собраться под Новый год в семейном кругу было настоящим праздником. Никто не мог забежать к нам в этот вечер: ни друг, ни просто знакомый. Именно поэтому мы

ощущали особую признательность к нашему «потустороннему» другу, Сфере, имевшей обыкновение навещать нас в новогоднюю ночь.

Мы все очень ждали ее прихода, и по мере того, как времени до полуночи оставалось все меньше, напряжение возрастало. Разумеется, на торжественный ужин были поданы окружности на масле, а потом мне как отцу семейства пришлось рассказывать сказку. На этот раз я решил остановить свой выбор на сказке о спящей красавице — принцессе, которая жила в огромном замке посреди дремучего леса. Деревья в этом лесу были необычайно колючими и к тому же с каждым годом становились все толще и толще, поэтому пройти через лес к замку не было никакой возможности. Минуло сто лет, прежде чем один предприимчивый принц, разумеется, юный Двенадцатиугольник, задумал пробраться к замку. Сказать по правде, мне никогда не было до конца ясно, как ему удалось осуществить свой замысел. Я всегда говорил, что деревья от старости начали ссыхаться (такой процесс, как известно, действительно происходит в природе).

Когда принц добрался наконец до принцессы, то увидел, что все королевское семейство вместе с придворными спит беспробудным сном. Дело в том, что деревья за сто лет срослись так плотно, что приток свежего воздуха, необходимого для дыхания, прекратился, и все обитатели замка погрузились в сон. Они, наверное, все умерли бы, если бы не благовоение каких-то особенных деревьев, росших во дворе замка. Испаряясь, эти благовоения совершили чудо: обитатели замка не умерли, а лишь впали в полное оцепенение.

Принц влюбился в принцессу с первого взгляда. Он поцеловал ее, вдохнув при этом в легкие девушки свежий воздух, от чего принцесса проснулась. Приток свежего воздуха теперь был как раз достаточен для того, чтобы пробудить всех от столетнего сна. Сыграли свадьбу. Лес, как полагается в таких случаях, проредили, замок отремонтировали, а принц и принцесса жили долго и счастливо.

Незаметно подошло время, когда детям следовало отправляться спать. Моему старшему внуку разрешили остаться и присутствовать при событиях, которые должны были произойти.

В страшном волнении ожидали мы, когда настанет великий миг. Едва часы пробили полночь, перед нами появилась крохотная окружность — верный признак того, что Сфера сейчас предстанет перед нами, в нашем пространстве, своим наибольшим сечением.

Мы все считали ее другом семьи, хотя я и называл ее «Ваше превосходительство», да и сама Сфера чувствовала себя у нас как дома. Вскоре разговор зашел о тех, кому выпало испытать на себе поворот в пространстве большего числа измерений, и я рассказал Сфере о коммерсante, который однажды обнаружил, к своему ужасу, что правое и левое для него поменялись местами (у нас этот случай известен под названием «случай с Верта-то»). Сфера выслушала меня весьма внимательно и заявила, что этого господина в трехмерном пространстве повернула она сама. Покидая нас в прошлый раз, Сфера подумала, что поворачивать собак в трехмерном пространстве вряд ли стоило, поскольку животные ничего не могли рассказать об испытываемых ими ощущениях. Повернуть в трехмерном пространстве кого-нибудь из членов нашей семьи было уже поздно: Сфера успела покинуть нас. Тогда она решила повторить эксперимент на первом встречном.

Сфера не могла сказать с уверенностью, где находился дом ее жертвы. Помнила лишь, что где-то неподалеку от нашего. Подопытным оказался какой-то восьмиугольник (что соответствовало действительности). Сфера не ожидала, что произведенный ею эксперимент причинит несчастному столько страданий. Но коль скоро восьмиугольник уже был перевернут в трехмерном пространстве, Сфера не торопилась возвращать его в исходное состояние. Если бы столь развитая личность, как восьмиугольник, могла сообщить об ощущениях, испытанных ею при перевороте в трехмерном пространстве, то это, по мнению Сферы, имело бы величайшее значение для науки.

Мне очень хотелось узнать, считает ли наш друг по-прежнему, что трехмерный предмет нельзя повернуть в четырехмерном пространстве так, чтобы его правая и левая стороны поменялись местами, но счел за благо не касаться этого щекотливого вопроса. Не знаю, почувствовала ли Сфера, о чем я размышляю, но и ее мысли в течение довольно долгого времени, пока я боролся

с искушением задать свой каверзный вопрос, были, по-видимому, заняты тем же, ибо она неожиданно сказала:

— Случай с господином Вертато совершенно аналогичен случаю, происшедшему в Трехмерии.

— А что у вас тоже кого-нибудь перевернули в четырехмерном пространстве? — с интересом спросил я. — Но ведь такое возможно лишь при вмешательстве некоего четырехмерного существа?

— Вы правы, — ответила Сфера. — Я обсуждала эти вопросы с Гиперсферой. Ей удалось убедить меня в том, что и трехмерные существа можно повернуть так, чтобы их правая и левая стороны поменялись местами. Гиперсфера не хотела начинать свои эксперименты с живых существ, и поэтому действие переворота в трехмерном пространстве было решено предварительно испытать на неодушевленных предметах. Сначала мы никак не могли найти подходящий объект, но потом я подумала, что действие поворота в четырехмерном пространстве неплохо было бы испытать на трехмерных книгах. Вместе с Гиперсферой мы отправились в книжный магазин, где я отобрала книги, содержавшие взгляды сторонников одного политического направления, которые я не разделяла. Все эти книги Гиперсфера тотчас же повернула в четырехмерном пространстве. Поскольку каждая буква перешла при такой операции в свое зеркальное отражение, то «обращенные» оказались совершенно неудобочитаемыми. Правда, приступая к эксперименту, я упустила из виду, что нанесу ущерб владельцу книжного магазина — лицу совершенно невиновному. Обращенные книги, естественно, не пользовались спросом. Владелец магазина вернул их издателю, который то ли прислал взамен другие экземпляры и тем самым взял на себя все расходы по возмещению убытка, то ли заявил, что полученные им книги ему не известны и он не имеет к ним никакого отношения. Один-единственный экземпляр обращенной книги попал в музей как замечательный, но необъяснимый технический казус. Рядом с ним для сравнения выставили необращенный экземпляр той же книги. Таким образом, я косвенно способствовала привлечению внимания к той книге, распространению которой мне так хотелось воспрепятствовать.

Над тем, что сообщила нам Сфера, требовалось хорошенько поразмыслить. После долгого молчания я спросил:

— А не производились ли в Трехмерии опыты по «обращению» живых существ?

— Такие опыты в конце концов все-таки были произведены,— сообщила Сфера.— Гиперсфера сначала решительно воспротивилась им. Она считала неисключенной возможность того, что живое существо, после того как его подвергнут повороту в четырехмерном пространстве, станет несчастным. Мне эта мысль была непонятна. Однако спорить с Гиперсферой не приходилось, и мне не оставалось ничего другого, как придумать ситуацию, которая полностью исключала бы возможность нежелательных, с точки зрения Гиперсферы, последствий эксперимента. И пока я размышляла, у меня созрел необычайный план. В Трехмерии встречается один недуг особого рода. Тех, кто им страдают, называют левшами. Все, что другой человек делает правой рукой, левша делает левой. В повседневной жизни левша сталкивается со множеством неудобств. Многие из тех действий, которые обычный человек («правша») легко совершает правой рукой, нельзя выполнить левой или они требуют от левши значительных усилий. Те же операции, которые с одинаковой легкостью можно выполнить и правой, и левой рукой, большинство людей выполняет правой рукой, ибо большинство составляют «правши». Если левше не удастся выполнить то, что делает обычный человек, он становится объектом для насмешек.

— Значит, быть левшой не модно? — спросил у Сферы мой внук.

— По сути дела, да,— ответила Сфера.— Мода правит Трехмерием так же, как и Флатландией.

— В Лайнландии все обстоит иначе,— заметил мой сын.

— Но какое отношение имеют левши к вашему плану? — поинтересовался я.

— Самое непосредственное! Если левшу повернуть в Гиперпространстве, то его правая рука станет левой, а левая рука — правой, и левша станет «правшой».

— Великолепный план! — воскликнул я.— И вам удалось его осуществить?

— И да, и нет, — ответила Сфера. — Гиперсфера вняла моим доводам и повернула одного левшу в четырехмерном пространстве. Но человеку, над которым произвели опыт, превращение в «правшу» не принесло счастья. В бытность свою левшой он научился писать левой рукой, теперь же все написанное левой рукой сам он еще может прочитать, но остальным оно непонятно: наш бывший левша пишет зеркальным шрифтом. Не может он читать и написанное другими. Даже собственные письма, написанные перед выздоровлением, кажутся ему испещренными непонятными иероглифами. Наш левша был убежден, что заболел. Однако врач, к которому он обратился, не обнаружил у него никаких признаков болезни, временно запретил ему писать и читать и посоветовал побольше гулять. Совет врача оказался роковым. Поскольку у бывшего левши правая часть тела стала левой, а левая — правой, при виде мчавшейся навстречу машины он отступил не в ту сторону и погиб под колесами.

— Поистине печальный исход отлично задуманного эксперимента, — сказал я.

— Да, — задумчиво протянул мой сын. — Вы слишком рано предоставили своему пациенту свободу. Нужно было сначала дать ему полностью привыкнуть к изменившимся обстоятельствам. Хотя здесь не все еще ясно, быть может, в дальнейшем пациентов следовало бы на длительное время помещать в специально предназначенные санатории и проводить с ними курс обучения, чтобы они постепенно приобретали навыки, необходимые им для жизни в обращенном мире?

— При этом, как и в случае с господином Вертато, важную роль могла бы играть музыка, — добавила моя жена.

И все же остановились на том, что излечение левшей не представляет особого интереса и его вряд ли следует проводить в широких масштабах. Неудобства, испытываемые левшой, не столь велики, чтобы он чувствовал себя чужим в этом мире, а резкий переход в обычное состояние (от левши к «правше») влечет за собой столь опасные последствия, что недостатков у него гораздо больше, чем преимуществ.

Тут Сфера распрощалась со всеми и исчезла, оставив нам обильную пищу для размышлений и бесед.

ЧАСТЬ III

ИСКРИВЛЕННЫЕ МИРЫ

15. СЛУХ

Жизнь шла своим чередом, и тайны пространства, которые в первое время привлекали всеобщее внимание, все больше отступали на задний план. Обыватель, не особенно разбиравшийся в этих проблемах, давно уже говорил о другом и лишь иногда недоуменно задавал себе вопрос: «И зачем только ученые выдумывают всякие непонятные вещи?» Сами ученые, а к их числу я отношу и математиков, и естествоиспытателей, теперь все были убеждены в возможности существования миров с числом измерений, превышающим 2, хотя большинство сомневалось, что такие миры реально существуют. К разговорам о визитах из трехмерного пространства к нам, в Двухмерие, так называемой Сферы, или Гиперокружности, такие ученые относились как к выдумке, но ценили подобные фантазии, ибо те позволяли им знакомить широкую публику с геометрическими свойствами иных мыслимых миров. Однако вскоре произошли события, которые заставили всех совершенно по-новому взглянуть на всю совокупность проблем, связанных с пространством.

Однажды (я хорошо помню этот вечер) мы сидели по своему обыкновению в семейном кругу, как вдруг кто-то из моих детей спросил, слышали ли мы новость: директора Тригонометрической службы освободили от занимаемой должности. Меня это сообщение удивило. Не имея чести быть лично знакомым с директором, я тем не менее знал его как пунктуального служащего, весьма сведущего в науке и технике, который пользовался к тому же широкой известностью как искусный и точный наблюдатель. Что явилось причиной его внезапного позорного изгнания?

Моя жена высказала предположение, что снятый с поста директор мог питать пристрастие к деньгам

(такое иногда случается с самыми высокопоставленными чиновниками), но я не мог поверить, чтобы многоугольник, посвятивший себя науке и получавший огромное жалование, был способен пойти на преступление.

— Мало ли с какими финансовыми затруднениями мог столкнуться директор,— возразила мне жена.— Не исключено, что он потерял много денег на каких-нибудь спекуляциях.

— Может быть, у него расточительная жена,— высказал новое предположение мой сын.

— Или транжира сын,— в пику ему подхватила моя жена.

В то время мы еще ничего не знали об истинных причинах увольнения директора и могли лишь строить догадки.

— А что такое Тригонометрическая служба? — спросил мой старший внук.

— Служба, которая занимается измерением углов треугольников,— пояснил я.

— Я тоже знаю, как это делать,— ответил мой внук.— Ведь, в конце концов, каждый из нас с полным правом может называть себя угломером. У всех, кто встречается мне на улице, я прежде всего измеряю обращенный ко мне угол — прикидываю на глаз его величину. Такая оценка, как известно, оказывается очень точной — то ли от постоянных упражнений, то ли в силу врожденной способности измерять углы. В школе нас также, к сожалению, заставляют заниматься этим более чем скучным делом. А тому, кто умеет измерить углы, известен и сам треугольник.

— И все же измерение углов необходимо,— возразил я.— Время, потраченное на изучение этого тонкого искусства, нельзя считать потерянным напрасно. Каждый, кто быстро оценивает величину углов, хорошо разбирается в людях!

— Я не спорю,— признал мою правоту внук.— Просто мне хотелось сказать, что в измерении углов нет ничего особенно сложного — оно доступно каждому. Если же нам требуется измерить углы более точно, то их можно ощупать или обратиться в специально созданные для этой цели учреждения, где любому желающему не только измерят с высокой точностью его угол, но и выдадут официальное удостоверение о результатах измере-

ния. И мне никогда не приходилось слышать, чтобы подобными делами занималась Тригонометрическая служба.

— Замечание вполне справедливое, — съгласился я. — Тригонометрическая служба учреждена специально для того, чтобы путем измерения треугольников составить точную карту мира. Для этого весь мир был разбит на треугольники (триангулирован, или покрыт триангуляционной сетью), их углы измерены, а длины сторон вычислены.

— Дедушка, — укоризненно воскликнул мой младший внук, — как ты можешь так говорить! Разве можно вычислить длины сторон треугольника, зная лишь его углы?

— Разумеется, нельзя, — успокоил я внука, — в этом ты совершенно прав. Необходимо еще знать длину какой-нибудь из сторон. Тогда, точно измерив углы треугольника, можно вычислить длины остальных сторон.

— Для вычисления всех сторон треугольника достаточно знать длину одной из сторон и величину двух углов. Третий угол вычислить совсем не трудно, поскольку сумма всех углов треугольника равна двум прямым углам, или 180° , — счел необходимым добавить маленький всезнайка.

Я был горд его замечанием. Оно еще раз свидетельствовало о том, что малыш шел по стопам своих предков. Разве не был основатель нашего рода, знаменитый Квадрат, его прапрадедом?

На некоторое время в комнате воцарилась тишина. Каждый размышлял над необычайным происшествием. Первой нарушила молчание моя жена. Она сказала:

— Не понимаю, каким образом в вычислении сторон треугольников директор Тригонометрической службы усмотрел повод для того, чтобы совершить мошенничество. Может быть, директор злоупотребил своим правом выбирать вершины триангуляционной сети? Впрочем, выбор вершин — задача чисто техническая.

— Неизвестно, сколь строго следил директор за тем, как выполняют свои обязанности сотрудники Тригонометрической службы, — вмешалась в разговор жена моего сына, — а здесь-то и могли совершаться различные мошеннические проделки.

— Не будем больше говорить на эту тему,— потребовал я.— Мы ничего достоверно не знаем и лишь теряемся в догадках. Не будем фантазировать.

— Может быть, вскоре нам удастся разузнать какие-нибудь подробности? — предположила моя жена.

— Вполне возможно, — ответил я, не подозревая, сколь близок мой ответ к истине.

16. ВИЗИТ ДОКТОРА ПУНКТО

Однажды я занимался, сидя в своем кабинете. Мой любимый предмет — математика — увлекал меня все больше и больше. В тот вечер я размышлял над одной сложной задачей, когда мне доложили, что меня спрашивает некий господин. Я попросил провести посетителя ко мне в кабинет. Им оказался стройный восьмиугольник, двигавшийся с непринужденным изяществом. Внешность его с первого взгляда располагала к полному доверию и внушала почтение. Велико же было мое удивление, когда посетитель представился доктором Пункто, недавно уволенным со своего поста директора Тригонометрической службы, чья неожиданная отставка вызвала столько кривотолков.

— Возможно, вы догадываетесь,— начал он,— что послужило причиной моего визита.

Что я мог ему ответить? Хотя кое-какие соображения на этот счет и мелькнули у меня в голове, однако высказывать их вслух я считал не вполне удобным: по моим предположениям посетитель пришел просить меня о помощи в связи со своей отставкой. Разве станет кто-нибудь, а тем более разумный и просвещенный восьмиугольник обращаться за советом к шарлатану и прорицателю и разве не был я в глазах широкой публики искушен в черной магии? Разве не считали мои недоброжелатели, что я знаюсь с нечистой силой? Мой посетитель не производил впечатление многоугольника, способного побеспокоить кого-нибудь по пустякам или ради праздной болтовни. Похоже было, что он решил (быть может не без влияния своей жены) прибегнуть к последнему средству.

Что ему от меня нужно? Может быть, он надеется, что с помощью волшебства я извлеку для него из третьего измерения ту сумму денег, которую он растратил

или потерял, и ему удастся таким способом оправдаться? Подобные мысли промелькнули у меня в голове, и я пребывал в растерянности, не зная, что ответить моему посетителю. По-видимому, он заметил мое смущение, потому что, немного помедлив, сказал:

— Вкратце дело, по которому я осмелился вас беспокоить, сводится к следующему. Я пришел к вам за советом. Как вы, несомненно, слышали, меня уволили из Тригонометрической службы.

— Мне известно,— продолжал доктор Пункто,— что моя отставка породила множество самых нелепых слухов. Смею думать, однако, что вы придерживаетесь несколько иных взглядов на вещи, нежели широкая публика.

— Должен признаться,— ответил я,— что мне известен лишь сам факт вашей отставки. Относительно причин, вызвавших ее, я по сей день пребываю в полном неведении. Вам придется просветить меня на этот счет, чтобы я мог составить обо всем собственное мнение. Боюсь, однако, что не смогу ничем вам помочь.

Может быть, мои слова прозвучали несколько враждебно, но я умышленно избрал холодный тон. Я твердо решил без обвиняков указать нежданному гостю на дверь, невзирая на его восемь равных сторон, если только он вздумает обратиться ко мне как к чернокнижнику и колдуну.

— Понимаю ваше недоумение,— сказал доктор Пункто.— Вы не усматриваете, каким образом могли бы мне помочь. К сожалению, я не могу ответить на ваш вопрос, ибо и сам ничего не знаю. Я хочу лишь предложить вашему вниманию некий комплекс загадок, путь к их решению для меня покрыт мраком. Я даже не знаю, в каком направлении его искать. Но если окажется, что эти загадки не под силу решить даже вам, то этого не сумеет сделать никто!

— В мире, я имею в виду в нашем двумерном мире,— продолжал мой гость, подмигнув при этом,— есть немало математиков, но, думается мне, что здесь нашей старой, классической, математикой не обойтись. А поскольку вы показали, что способны не только воспринимать новые идеи, но и распространять усвоенные вами знания, то я решил: вряд ли кто-либо во всей Флатландии способен лучше вас беспристрастно разобраться в фактах.

— Если я правильно вас понял, — осторожно заметил я, — то ваш визит каким-то образом связан с чисто математическими проблемами и, следовательно, не имеет отношения к... гм... проблемам юридического и финансового порядка? Надеюсь, вы не рассердились на меня за то, что я задал вам столь прямой вопрос? — добавил я извиняющимся тоном.

— Наоборот, — воскликнул мой гость, — мне необычайно приятно опровергнуть слухи, распространяемые теми, кто не имеет ни малейшего представления о существовании возникшей проблемы. Речь идет о чисто научной или по крайней мере технической проблеме. Хотя я должен признаться, — добавил доктор Пункто, — что эта проблема носит весьма необычный характер.

Антипатия, которую я испытывал к неожиданному посетителю, бесследно исчезла. Я был захвачен таинственной проблемой, хотя и сам еще не сознавал этого.

— Позвольте спросить вас, — осторожно попытался выяснить я суть дела, — о чем, собственно, идет речь? Если об ошибках прикладных методов измерения и вычисления, то должен вас предупредить, что я не специалист и в технических вопросах не разбираюсь.

— Думаю, что интересующая меня проблема не имеет отношения к технике, а является чисто теоретической, — успокоил меня доктор Пункто. — Хотя не могу сказать этого с полной уверенностью. Знаю лишь одно: все в ней необычно, крайне необычно!

Взгляд бывшего директора Тригонометрической службы был устремлен куда-то вдаль. Я с сожалением подумал о том, что столь разумный человек, должно быть, поставил перед собой неразрешимую задачу, своего рода загадку, которой другие либо просто не замечают, либо считают не заслуживающей внимания. Желая хоть чем-то помочь ему, я заметил:

— А не лучше ли оставить все, как есть? Ведь не исключено, что интересующая вас проблема неразрешима...

— Неразрешима? — поспешил возразить он. — Нет, решение проблемы существует. Все имеет свои причины. Все имеет свое объяснение. Мне казалось, что вам как математику такая точка зрения должна быть особенно близка. Хотя объяснение порой бывает странным... очень странным!

— Можете рассчитывать на меня, — заверил я гостя. — Однако, чтобы я мог глубже понять проблему, постарайтесь изложить основные факты по возможности подробнее.

— Я бы предпочел не делать этого, — прямо заявил доктор Пункто. — Вы усомнитесь в моих наблюдениях, а может быть, и в моих умственных способностях. Не могли бы вы завтра отправиться со мной в одно место?

— Что же, я не против, — сказал я. — Наоборот, вы настолько заинтриговали меня, что мне просто не терпится познакомиться с проблемой поближе. Все же должен предупредить заранее: не исключено, что вас постигнет большое разочарование и я не смогу объяснить явление, при анализе которого вы встретили столь большие трудности.

— Во-первых, — начал перечислять свои контрдоводы доктор Пункто, — может случиться, что вам удастся обнаружить какую-нибудь ускользнувшую от меня ошибку, хотя я уверен в обратном. Если вы все же найдете ошибку и выяснится, что все решается просто, то я буду чрезвычайно признателен вам за участие. Если окажется, что мои наблюдения верны и тем не менее нуждаются в объяснениях, то и в этом случае я останусь в выигрыше, ибо буду не один. С вами мы поделим трудности и сможем обсуждать их. Для меня это было бы огромной поддержкой. Во-вторых, не исключено, что вам удастся найти решение загадки. Итак, согласны ли вы мне помочь?

— Я уже сказал, — ответил я, — что ваше предложение необычайно заинтересовало меня. Я приложу все усилия, чтобы решить проблему, а в случае неудачи надеюсь, что вы не станете меня упрекать.

— Упрекать? — воскликнул мой гость. — Ни за что и никогда! Может быть, совместными усилиями нам удастся найти решение! Ум хорошо, а два лучше! К тому же, работая над одной проблемой, мы могли бы обсуждать ее и постепенно прийти к решению, хотя это и очень трудно.

— Могу я просить вас еще кое о чем? — задал я гостю последний вопрос. — Не намекнете ли вы, с какого рода задачей нам придется иметь дело?

— Охотно, — согласился доктор Пункто. — Не могли бы вы сказать, чему равна сумма углов треугольника?

Неожиданный вопрос озадачил меня, но я все же ответил:

— Разумеется, 180° .

— Всегда? — спросил доктор Пункто и с этими словами исчез за дверью.

17. УДИВИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Последнее замечание моего нового знакомого заставило меня призадуматься. Я разговаривал с ним довольно долго, у меня создалось впечатление, что это вполне разумный многоугольник, и вдруг этот вопрос, эти странные сомнения...

Можно ли быть уверенным в том, что на вопрос доктора Пункто в ста случаях из ста следует отвечать утвердительно? Всегда ли сумма углов треугольника равна 180° ? Как можно усомниться в этом? Случалось ли кому-нибудь видеть треугольник с иной суммой углов? Как можно представить себе такой треугольник? Впрочем, доказать, что сумма углов треугольника равна 180° , совсем просто. Не лучше ли мне отказаться от участия в сомнительной затее моего нового знакомого? Потом отделаться от него будет гораздо труднее. А что если я попытаюсь разыграть из себя маньяка, одержимого какой-то другой бессмысленной навязчивой идеей, и заговорю с доктором Пункто о ней?

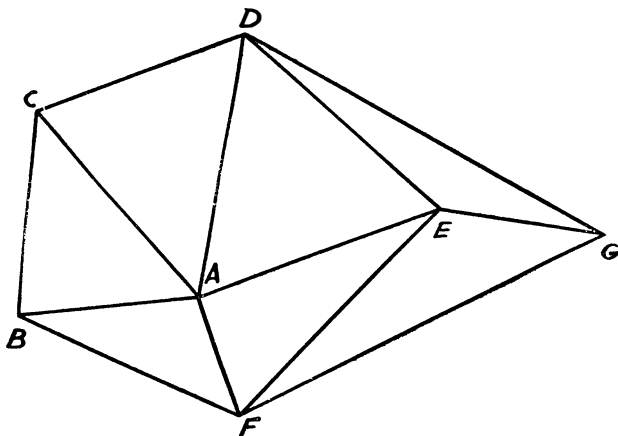
За этими размышлениями я провел бессонную ночь. Я намеревался придумать какую-нибудь отговорку, сослаться на неожиданный срочный вызов, в крайнем случае сказать, что умер кто-то из членов семьи, чтобы любым путем уклониться от встречи с тем, кто завтра с самого раннего утра будет стоять у моей двери. Однако стоило мне лишь увидеть вчерашнего гостя, как я вновь ощутил к нему такое доверие, что, не колеблясь, принял приглашение отправиться вместе с ним, о чем до сих пор не жалею.

Место, куда привел меня доктор Пункто, находилось за городской чертой. Наблюдательные пункты, расположенные на большом расстоянии друг от друга, образовали там триангуляционную сеть. Мы находились на наблюдательном пункте А. Оттуда при помощи новейшего прибора для измерения углов можно было определить

углы между направлениями AB , AC , AD , AE и AF . Мой провожатый попросил меня измерить угол между направлениями на пункты C и D . Я с удовольствием выполнил его просьбу, а заодно измерил и четыре остальных угла.

— Сумма всех пяти измеренных мной углов, естественно, должна быть равна 360° , — заметил я.

— Ну что же, проверим сначала сумму, — сказал мой новый друг (почему бы мне, в самом деле, не называть так доктора Пункто?).



Триангуляционная сеть — пространство, разбитое на треугольники.

Мы сложили полученные величины углов и получили в результате величину, которая хотя и очень незначительно, но все же отличалась от 360° .

— Разумеется, ровно 360° не удастся получить никогда, — заметил мой спутник, — ибо любое измерение, сколь бы тщательно мы его ни производили, неизбежно содержит некую малую ошибку. Она так и называется — ошибка измерения. Поэтому и сумма пяти измеренных углов никогда не бывает в точности равна 360° : она то меньше, то больше. У опытного наблюдателя отклонения меньше, у неопытного больше, но даже тот, кто производит измерения особенно тщательно, неизбежно совершает некоторую ошибку, хотя и очень малую.

— Об этом вы могли бы и не рассказывать,— заметил я.— Что существует ошибка измерения, мне хорошо известно.

— Тогда вам должно быть понятно,— продолжил свои объяснения мой собеседник,— что в том случае, когда одно и то же измерение приходится повторять несколько раз подряд, результаты получаются разными: один больше, другой меньше.

— Разумеется, — согласился я, — но может случиться и так, что результаты нескольких последовательных измерений одной и той же величины окажутся одинаковыми...

— А затем,— подхватил мой друг,— снова появится меньшее или большее значение.

И добавил:

— До сих пор все, о чем мы с вами говорили, было понятно. Вот теперь и начинается самое удивительное. Если мы перейдем в пункт C и измерим угол между направлениями CD и CA , а затем перейдем в пункт D и измерим угол между направлениями DC и DA и, наконец, вычислим сумму всех трех измеренных нами углов треугольника ACD , то...

— У нас должно получиться 180° ,— закончил я фразу.— Вычисленная нами сумма окажется не в точности равной 180° , а будет отличаться от 180° либо в большую, либо в меньшую сторону на малую величину.

— Вы правы: так должно быть,— согласился мой друг,— но так не получается. Вычисленная мной сумма всегда оказывалась больше 180° , причем отклонение было слишком велико для того, чтобы его можно было приписать ошибкам измерения.

— Следовательно, — заключил я, — обнаруженное вами отклонение обусловлено не ошибками измерения и должна существовать более глубокая причина, по которой сумма углов треугольника ACD действительно больше 180° .

Я рассуждал здраво и логически безупречно, но все же, произнеся эти слова, невольно сам испугался их. Как это может быть? Что я, собственно, утверждаю? Сумма углов треугольника больше 180° ! Но такое невозможно! Что делать, как быть?!

Доктор Пункто заметил мое замешательство. Он улыбнулся и сказал:

— Все правильно! Именно к такому выводу пришел и я. Вы рассуждаете правильно, но... может ли быть такое? Нельзя же думать, что нам впервые удалось открыть треугольник, у которого сумма углов больше 180° ! Такой вывод противоречит здравому смыслу. Такой вывод противоречит основам геометрии! Однако сумма углов оказывается больше 180° не только у треугольника ACD , но и у всех треугольников триангуляционной сети. В чем здесь дело, я не знаю. Может быть, вам удастся понять, чем вызван столь необычный результат? Может быть, вы можете хотя бы подсказать, в каком направлении следует искать решение этой загадки?

— Уж не послужило ли сделанное вами открытие причиной вашей отставки? — спросил я.

— Да, меня уволили именно из-за этого, — подтвердил доктор Пункто. — Отказались верить результатам моих измерений. Потребовали объяснений. Я рассказал все, о чем знал. Меня выслушали. Я видел, что многие смотрят на меня с сочувствием: либо я мошенник, либо душевнобольной. Сумма углов треугольника равна 180° и ничему другому. Но, клянусь святой Округностью, я и сам знал об этом не хуже их! Мои судьи сочли, что, коль скоро я способен представить такие результаты измерений, мне никак не подобает занимать пост директора Тригонометрической службы.

— Но ведь здесь нет никакой подтасовки данных! — возмутился я.

— Мне особенно приятно слышать это от вас, — с достоинством заметил доктор Пункто. — По правде говоря, ничем другого я и не ожидал. Разумеется, мне не составляло никакого труда подтасовать результаты измерений так, чтобы скрыть обнаруженную невязку, но, совершив подобный подлог, я поступил бы против собственной совести.

— Кроме того, — добавил я, — не исключено, что впоследствии другой наблюдатель обнаружил бы расхождение между 180° и суммой измеренных углов треугольника и тогда ваш обман раскрылся бы.

— Вы правы, — такая возможность существует всегда, — признал доктор Пункто. — Нет, я действительно не мог поступить иначе.

— Есть еще один выход из создавшегося положения.

— Какой? — с интересом спросил доктор Пункто.

— Заявить, что ваши измерения были произведены с малой точностью и, следовательно, полученные результаты носят лишь приближенный характер. Тогда вопрос о невязке отпадает сам собой и все данные не будут противоречить геометрии.

— Такой выход действительно возможен, но лично мне он претит. Я выполнил работу с величайшей тщательностью и представил результаты измерений, произведенных с величайшей точностью. Я не могу поступить иначе и считаю, что только так следует относиться к своим обязанностям.

— Полностью разделяю ваше мнение, — успокоил я доктора Пункто. — Я отношусь к исполнению своих обязанностей точно так же.

Наступило продолжительное молчание. Каждый из нас был погружен в свои мысли. Первым нарушил тишину я:

— Давайте подумаем над тем, что следует сделать в первую очередь. Я предлагаю как можно точнее исследовать обнаруженное явление.

Доктор Пункто с энтузиазмом воскликнул:

— Мой лучший друг! Не часто случается в жизни неожиданно обрести в зрелые годы настоящего друга. Друзьями в большинстве случаев становятся в юности, но я чувствую, что именно теперь у меня появился настоящий друг. Позвольте мне называть вас своим другом. Мой лучший друг! Не могу выразить, как я благодарен вам за ваше предложение, за вашу готовность помочь мне, за ваше согласие посвятить свое время и свой разум решению проблемы, затронувшей лично меня.

— Эта проблема затрагивает не только вас, — возразил я. — Речь идет о научной проблеме из области геометрии, которая меня чрезвычайно заинтересовала. Я охотно присоединяюсь к вам. Как два друга, мы совместными усилиями постараемся решить проблему, с которой вы столкнулись, или по крайней мере по возможности ясно и кратко изложим основные этапы своих поисков, чтобы впоследствии кто-нибудь мог воспользоваться нашими результатами.

— Позиция, достойная подлинного ученого! — одобрил мою речь доктор Пункто. — Вперед, за работу!

— Прежде всего,— попросил я,— объясните, почему обнаруженную вами невязку не замечали раньше. Относите ли вы это за счет погрешностей в прежних методах измерений или усматриваете причину в чем-то ином?

— Ответить на ваш вопрос очень просто. Существующие ныне методы измерений и новейшие приборы позволяют достичь большей точности, но нельзя отрицать и другое: отклонения суммы измеренных углов треугольника от 180° столь велики, что их вполне можно было обнаружить и раньше.

— А как, по-вашему, почему столь интересное явление все же оставалось незамеченным? Может быть, в этом проявилась боязнь признать странные, непонятные результаты измерений?

— Вполне возможно,— согласился доктор Пункто.— Признав правильность измерений, мы тем самым бросаем вызов тем, кто производил измерения до нас, а нам бы не хотелось делать этого без крайней необходимости.

— Займемся в таком случае поиском другой причины,— продолжал я.— Приводили ли прежние наблюдатели лишь округленные результаты измерений или выписывали столько десятичных знаков, сколько им удавалось получить?

— Я специально интересовался этим. У меня сложилось впечатление, что каждый наблюдатель приводил полученные им результаты с максимальной точностью, которой ему удавалось достичь. Тем не менее мне не довелось встретить ни одного упоминания о том, что величина суммы углов треугольника может быть значительно больше 180° . Малые же отклонения, естественно, можно приписать ошибкам измерения.

— Необходимо выяснить, в чем состоят различия между старыми и новыми методами измерений. Короче говоря, что не так или делается не так, как раньше?

— Между старыми и новыми методами измерений существует одно большое различие. Раньше измерения производили на маленьких, а теперь на больших треугольниках.

— Тогда нам прежде всего необходимо выяснить, как влияет на результаты измерений величина выбранных для триангуляции треугольников. Каким образом мы могли бы это сделать? Вы сейчас находитесь в отставке, следовательно, не можете производить

измерения — у вас нет для этого ни приборов, ни помощников. А коль скоро это так, то не существует ли какою-нибудь иного способа раздобыть все необходимое?

— Надеюсь,— вздохнул доктор Пункто,— что мои бывшие сотрудники, когда я расскажу им, в чем дело, охотно согласятся произвести нужные измерения.

— Прекрасно,— сказал я.— Буду ждать вас у себя дома вместе с результатами измерений. Там мы сможем подробно обсудить наши дальнейшие планы.

Мы расстались как лучшие друзья. Я был убежден, что господин Пункто исполнит все пунктуальнейшим образом и в кратчайший срок, и не ошибся.

18. НЕРАЗРЕШИМАЯ ЗАДАЧА

Прошла целая неделя, прежде чем мой друг Пункто навестил меня, чтобы обсудить полученные им данные. За это время он успел построить множество больших и малых треугольников и с высокой точностью измерить их углы. Сумма углов у больших треугольников неизменно оказывалась больше 180° , причем с увеличением размеров треугольника невязка возрастала. У маленьких треугольников отклонение суммы их углов от 180° было столь незначительным, что обнаружить его не удалось.

Немало часов я провел, проверяя выкладки доктора Пункто, но не нашел ни одной ошибки.

— Отсюда следует,— констатировал я,— что собранные вами факты можно считать твердо установленными и теперь мы вправе перейти к следующему этапу.

— Боюсь, что в дальнейшем ничем не смогу быть вам полезным,— огорченно заметил доктор Пункто.— Все по-прежнему выглядит весьма странно, и мы не полагаем ни малейшим намеком на то, в каком направлении надлежит искать объяснение.

— Без вас мы не сможем продвинуться ни на шаг,— заверил я его.— Прежде всего факты, объяснение придет потом. Мы на правильном пути, и я не сомневаюсь в том, что в конце концов нам удастся найти истину.

Мы сидели до поздней ночи, перебирая всевозможные гипотезы, но безрезультатно. Случай был поистине удивительный! Мы условились, что до следующей встречи, назначенной через три дня, каждый из нас попытается

самостоятельно обдумать факты, после чего мы обменяемся идеями. Даже в том случае, если они окажутся неудачными, ошибка одного вполне может привести другого на верную мысль. Мы сердечно распрощались и расстались в полной уверенности, что совместными усилиями найдем выход из лабиринта.

Излишне говорить о том, что все три дня я провел в напряженных размышлениях. Ежедневно, прежде чем заснуть, я подолгу обдумывал проблему в надежде увидеть во сне какую-то подсказку, которая бы помогла ее решить или хотя бы направила поиски решения по правильному пути. Но все было напрасно. Днем я пытался выстроить в логической последовательности все известные мне факты, но каждый раз заходил в тупик: логика была бессильна найти ответ на столь «нелогичный» вопрос. Погруженный в свои размышления, я забыл обо всем на свете. Перед моим мысленным взором мелькали разнообразнейшие треугольники: большие и маленькие, правильные и неправильные, тупоугольные и остроугольные. Каждый из них я обходил по периметру, измерял все углы и принимался за следующий.

Мои близкие, не желая мне мешать, и не пытались пробудить меня от грез наяву. Но порой мне случалось ловить на себе их удивленные взгляды. Я не слышал, когда ко мне обращались, и в ответ неизменно задавал один и тот же сакраментальный вопрос: «Не могли бы вы указать треугольник, у которого сумма углов больше 180° ?»

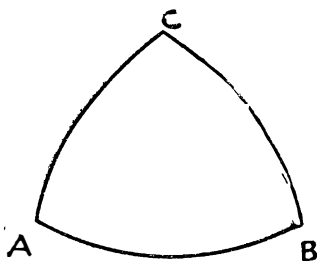
На утро третьего дня (того самого, на который у меня была назначена встреча с моим другом Пункто) ко мне в кабинет заглянул мой внук.

— Дедушка, — сказал он, — не знаю, смогу ли я помочь тебе, но вчера ты все время спрашивал о треугольнике, сумма углов которого больше 180° .

— Да, — подтвердил я, — и мне хорошо известно, о чем ты сейчас думаешь. Ты, естественно, считаешь, что твой старый дедушка выжил из ума. Я и сам прекрасно знаю, что мой вопрос звучит бессмысленно, но это, поверь мне, далеко не так. Я пытаюсь найти ответ на один вопрос и не знаю толком, математический он или философский, а для того чтобы найти ответ, мне необходимо своим глазом увидеть треугольник, у которого сумма углов была бы больше 180° .

— Дедушка,— воскликнул мой внук,— я прекрасно понимаю, что какой бы обычный треугольник мы ни взяли, сумма его углов не будет отличаться от суммы углов любого другого обычного треугольника. Треугольник, который нужен тебе, должен быть необычным треугольником, ибо лишь у необычного треугольника может быть необычное свойство. Если ты разрешишь, я нарисую один такой треугольник.

Хотя я не возлагал особых надежд на помощь со стороны представителя младшего поколения, тем не менее мой утвердительный ответ на его просьбу был про-



Треугольник, нарисованный моим внуком. Сумма углов такого треугольника больше 180° .

диктован не только любовью к внуку, но и любопытством: мне не терпелось узнать, что за необычный треугольник выдумал мой внук. Мальчик был очень польщен, увидев, что дед проявляет к его открытию искренний интерес, и тотчас же принялся рисовать «необычную» фигуру.

— Дедушка, вот треугольник, у которого сумма углов больше двух прямых углов.

— Да, но у твоего треугольника стороны не прямые,— возразил я.

— В этом и заключается мое открытие,— заявил юный геометр.— Нужно же было придумать нечто необычное для того, чтобы ответить на необычный вопрос.

— Что касается необычности, то тут мы квиты,— вынужден был признать я.— Но должен тебе сказать, что до сих пор мне никогда не приходилось видеть треугольники с кривыми сторонами.

— А ты в этом уверен? — спросил мальчуган.

Услышав вопрос внука, я даже рассердился. Мне ли не быть уверенным! Производя измерения на местности, мы даже не проводили стороны треугольников, а проводили с помощью измерительных приборов прямые, вдоль которых свет распространялся от одного наблюдательного пункта к другому, а свет, как известно, распространяется вдоль прямых. На этом все и основано!

Разумеется, я не стал выказывать признаков недовольства, ибо меня очень обрадовало, что мой внук изъявил желание помочь мне. И хотя его «необычный треугольник» не позволил мне продвинуться ни на шаг дальше, он все же отвлек меня от безрадостных мыслей, от безнадежно запутанных рассуждений, в которых я беспомощно блуждал по замкнутому кругу, не видя выхода. Вечером придет мой друг. Мы обсудим с ним загадочную проблему, к которой я по-прежнему не знаю, как подступиться. Может быть, ему удалось придумать нечто новое?

19. НЕОБЫЧНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Мои надежды на то, что господину Пункто удалось набрести на какую-нибудь удачную идею, оказались напрасными. По его словам, он все три дня провел в размышлениях над проблемой, но, насколько я понял из его объяснений, во всем, что касалось поиска решения, всецело положился на меня. Доктор Пункто считал, что я, внук знаменитого Квадрата, должен обладать незаурядными способностями и уметь решать самые необычные проблемы, в особенности те, перед которыми бессильна традиционная геометрия. Хотя столь высокое мнение о моих способностях не могло не польстить мне, я все же был несколько раздосадован тем, что доктор Пункто занимался проблемой, если можно так выразиться, «не в полную силу». Я высказал ему свое недовольство, но он со смехом упрекнул меня в том же, и мне не оставалось ничего другого, как признать, что не имею ни малейшего представления, в каком направлении надлежит продолжать поиски решения. Я не мог похвастаться ни тем, что мне известен правильный подход к решению проблемы, ни даже тем, что знаю, как хотя бы немного продвинуться к цели.

— О решении говорить преждевременно,— сказал мой гость.— Пути к нему мы выясним позже. Пока же нам требуются самые необычные идеи, которые позволят построить треугольники со свойствами, отличными от привычных нам свойств треугольников. В построении таких треугольников — один из возможных шагов на пути к решению интересующей нас проблемы. Если бы мне удалось придумать такую фигуру, что ее хотя бы с известной натяжкой можно было назвать треугольником и сумма ее углов при этом была бы больше 180° , то я считал бы выход из тупика, в котором мы находимся, найденным. Однако, как я ни старался, мне так и не удалось придумать фигуру, обладающую нужными свойствами.

— Да,— вынужден был признать я,— ваша точка зрения вполне приемлема. Но коль скоро все упирается в построение «треугольника» с нужными свойствами, то у меня для вас кое-что есть.

С этими словами я предъявил доктору Пункто треугольник с изогнутыми сторонами, который нарисовал мне мой внук.

Пункто внимательно выслушал меня, тщательно осмотрел треугольник с криволинейными сторонами и... не засмеялся! После длительного молчания он произнес:

— Может быть, это первый шаг к решению. Сумма углов данного треугольника действительно больше 180° . В этом смысле задача решена. Вопрос лишь в том, допустимо ли рассматривать треугольники с изогнутыми сторонами.

— Разумеется, недопустимо,— заметил я несколько раздраженно.— Ведь если я не ошибаюсь, свет распространяется вдоль прямых.

— Вы совершенно правы,— невозмутимо ответил Пункто.— Найдено решение лишь частичной проблемы, но оно может оказаться ложным.

Мы еще долго, на протяжении нескольких часов, обсуждали проблему, но безрезультатно. Прощаясь со мной, доктор Пункто сказал:

— Попробуем кратко сформулировать, как нам представляется положение вещей в данный момент. Из наблюдений нам известно, что сумма углов треугольников, измеренных на местности, не равна 180° , а больше 180° , причем невязка возрастает с увеличением разме-

ров треугольника. У треугольников больших размеров она больше, чем у треугольников меньших размеров. Это во-первых. Во-вторых, можно предполагать, причем без особой уверенности, что подобная невязка встречается у треугольников, стороны которых не прямолинейны.

— Таков печальный итог наших размышлений,— подтвердил я.

— Итог не окончательный,— оптимистически заметил доктор Пункто.

— Что нам делать дальше?— спросил я.— Снова три дня предаваться размышлениям в ожидании, что кому-нибудь из нас придет в голову еще одна удачная идея? Окажется ли она удачнее первой?

— Да, такая перспектива не слишком привлекательна,— согласился доктор Пункто.— По-видимому, нам лучше поговорить с другими людьми и посмотреть, как они будут реагировать на идею о криволинейных треугольниках.

— Не обратиться ли за советом к моему внуку?— саркастически произнес я.— Мне кажется, что это лучший способ беспредельно раздуть тщеславие мальчишки.

— Я с большей охотой послушал бы,— сказал мой друг,— как реагируют на интересующую нас проблему ученые мужи, в особенности математики. Нельзя ли заинтересовать их? Мы располагаем фактами, требуется найти их научное объяснение.

— Или опровергнуть эти факты,— добавил я.

— Думаю, что опровергнуть их невозможно,— возразил доктор Пункто, и я не мог с ним не согласиться, поскольку результаты измерений действительно были безупречны.

Нам казалось, что лучше всего привлечь к интересующей нас проблеме внимание членов физико-математического факультета нашего университета. Я вызвался разыскать математиков и физиков, которые бы выразили готовность ознакомиться с проблемой.

20. НА ФАКУЛЬТЕТЕ

Вопреки ожиданиям я без труда справился со своей задачей. Я думал, что факультет поручит кому-нибудь из специалистов выслушать наши «свидетельские

показания» по поводу необычайных событий, но все вышло иначе. Доктора Пункто и меня пригласили на собрание всего факультета, с тем чтобы мы могли изложить там свои взгляды.

В назначенное время мы в отличном расположении духа отправились на высокаторжественный форум, но, войдя в зал, почувствовали себя, как подсудимые перед началом разбирательства. Мы не могли отделаться от ощущения, что пригласили нас лишь для того, чтобы, пользуясь удобным случаем, пресечь распространяемую нами ересь, осудив ее в официальном решении общего собрания факультета. Это ощущение не покидало нас на протяжении всего заседания.

Сначала председатель предоставил слово доктору Пункто, назвав его «бывшим землемером». Доктор Пункто не без сарказма исправил ошибку председателя, сказав, что в настоящее время он имеет честь носить звание «бывшего главного землемера, эксдиректора Центральной Тригонометрической службы». Председательствующий реагировал на это замечание лишь краткой фразой «Вам слово», после чего доктор Пункто спокойно, строго придерживаясь фактов, рассказал обо всем, что произошло. Он сообщил собравшимся, что, согласно проведенным под его руководством измерениям, сумма углов треугольника оказалась больше 180° , причем отклонение от 180° тем больше, чем крупнее размеры треугольника. Никогда ранее, подчеркнул он, такое отклонение не наблюдалось, поскольку в прежние времена измерения производились на маленьких треугольниках и упомянутое выше отклонение превышало ошибки измерений. Доктор Пункто заявил, что отбрасывать серию произведенных под его руководством измерений на том лишь основании, что они приводят к парадоксальному выводу, не следует, ибо, по его мнению, необходимо попытаться найти научное объяснение столь странному явлению.

После того как доктор Пункто ясно и понятно изложил все имевшиеся в нашем распоряжении факты, слово попросил ученый-математик по имени Эрго. Путем весьма длинных и сложных рассуждений он доказал, причем вполне правильно, что наука, вообще говоря, призвана заниматься поиском объяснений экспериментально наблюдаемых фактов, а факты, о которых упоми-

нал в своем выступлении доктор Пункто, такого рода, что науке следует незамедлительно отказаться от их рассмотрения. Сумма углов любого треугольника равна 180° , или двум прямым углам. Это доказали еще в глубокой древности, поэтому каждому ясно, что сумма углов треугольника не может принимать другое значение. А коль скоро некая серия измерений приводит к противоречию с одним из основных принципов науки, то эта серия измерений ошибочна. Ученые не обязаны заниматься поиском ошибок. Это должны сделать сами наблюдатели, допустившие вопиющую небрежность! Факультет не должен заниматься столь недостойным делом. Принять участие в подобной затее означало бы нанести ущерб престижу факультета.

Затем слово взял ученый-физик профессор Суппосо. Мы сразу же почувствовали, что выступает человек совсем другого склада. Профессор Суппосо все свое выступление построил на том, что в естественных науках, и в частности в физике, нередко приходится иметь дело со странными на первый взгляд результатами, которые при ближайшем рассмотрении оказываются верными. По его мнению, задача физики в том и состоит, чтобы отыскивать факты, кажущиеся невероятными, и затем пытаться найти им объяснение. Факты, приведенные доктором Пункто, весьма необычны, продолжал свои рассуждения профессор Суппосо, ибо они затрагивают основы основ математики, но тем не менее мы должны отнестись к ним с величайшей благосклонностью. Нам следует задать себе вопрос: можем ли мы представить себе треугольник, у которого сумма углов была бы больше 180° ? Никогда еще нам не доводилось видеть такой треугольник ни в действительности, ни в воображении. Следовательно, чтобы обладать столь необычайными свойствами, сами треугольники должны быть весьма необычными. Может ли кто-нибудь из присутствующих опрокинуть существующие многократно проверенные научные представления и указать нам или начертить такой треугольник? Если никто не в состоянии сделать это, то я считаю вопрос исчерпанным. Однако если кому-нибудь все же удастся построить такой треугольник, то я с радостью приму участие в дальнейшем обсуждении.

Ободренный выступлением профессора Суппосо, я попросил слово и, когда мне его предоставили, произнес следующую речь:

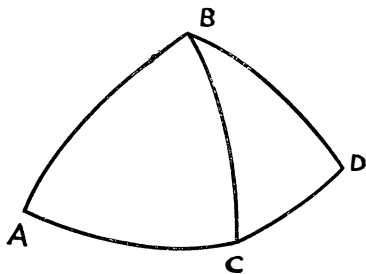
— Уважаемые господа, высокоученые члены прославленного факультета! Позвольте мне высказать одно-единственное замечание по поводу выступления предыдущего оратора. Я в состоянии начертить треугольник, обладающий требуемым свойством. Предыдущий оратор уже отметил, что этот треугольник должен быть странным, необычным. Вот я и намереваюсь продемонстрировать вам треугольник не с прямолинейными, а с криволинейными сторонами, у которого сумма углов больше 180° .

На какое-то мгновение в зале воцарилась тишина. Пользуясь паузой, я начертил криволинейный треугольник.

— Позволю себе заметить, — возразил господин Эрго, — что свет в нашем мире распространяется вдоль прямых и поэтому стороны треугольников, используемых при триангуляции, не могут быть искривленными.

Шум в зале мгновенно стих, когда слово вновь попросил Суппосо.

— Господин председатель, — сказал он, — я решительно не согласен с тем, что здесь только что утверждалось. Мы могли бы принять гипотезу о том, что свет



Сторона BC не может в одно и то же время быть изогнутой вправо и влево.

распространяется не прямолинейно, а криволинейно, но, прежде чем совершить такой шаг, необходимо выяснить, не противоречит ли такая гипотеза другим явлениям. У меня подобная гипотеза вызывает возражение по со-

вершенно иной причине. Рассмотрим любые два треугольника в триангуляционной сети, имеющие общую сторону, например треугольники ABC и BCD . Для того чтобы сумма углов треугольника ABC была больше 180° , сторона BC должна быть изогнута наружу, то есть вправо. Но треугольник BCD должен обладать тем же свойством, что и треугольник ABC . Сумма углов этого треугольника также должна быть больше 180° , то есть сторона BC должна быть изогнута влево. Ясно, что сторона BC в одно и то же время не может быть изогнута и вправо, и влево. Следовательно, объяснение, предложенное нашим гостем, несостоятельно.

В ответ на это замечание я не мог возразить решительно ничего. Рассуждения Суппосо казались мне столь обоснованными, что я готов был отказаться от своей гипотезы. Больше сказать нам было нечего, ибо у моего друга Пункто также не осталось в запасе ни одного аргумента.

С притворным сочувствием и скрытой издевкой председательствующий подвел итог дискуссии:

— Вы видели, господа, что факультет не жалел ни сил, ни времени для рассмотрения вашей проблемы, но безрезультатно. Вам не остается ничего другого, как попытаться самим найти ошибки в произведенных вами измерениях. Ученые не могут тратить время на решение подобных вопросов. Факультет требует лишь, чтобы вы осознали свои заблуждения, не пытались за нашей спиной упрекать ученых в недостаточно доброжелательном отношении к вам и не выставляли нас в ложном свете. Если же вы не внемлете нашему дружескому предостережению, мы незамедлительно примем меры, дабы восстановить справедливость, и привлечем клеветников к ответу. Не смею вас больше задерживать, господа!

Ни один из нас не нашел, что ответить. Мы покинули зал и побрели к дому. На душе было скверно. Мы проиграли сражение. И все же нашим противникам не удалось убедить нас в том, что мы неправы. Наоборот, все факты были в нашу пользу, и науке рано или поздно придется найти им объяснение. Я пригласил доктора Пункто зайти ко мне, чтобы обсудить дальнейшие планы.

Войдя в мой кабинет, мы вновь почувствовали себя легко и непринужденно. Враждебный мир был где-то

далеко за его стенами. Мы долго сидели, погруженные в свои мысли, пока доктор Пункто не нарушил молчания. В его словах снова прозвучал присущий ему неисчерпаемый оптимизм.

— Встреча с учеными,— заметил он,— оказалась все же бесполезной. Эрго, человек старой закалки, просто отбрасывает все, что ему непонятно, но Суппосо сказал гораздо больше, и кое над чем из его рассуждений нам следовало бы подумать. Суппосо хотел бы увидеть треугольник, обладающий необычными свойствами. В случае необходимости он готов даже довольствоваться треугольником с изогнутыми сторонами. Его не устраивает лишь направление, в котором изогнуты стороны треугольника, ибо оно приводит к противоречию. Я не знаю, каким образом мы сможем преодолеть эту трудность, поскольку рассуждения Суппосо мне кажутся безупречными. Если какая-то линия не может быть изогнута ни влево, ни вправо, то она вообще не может быть изогнута, поскольку другого направления, в котором она могла бы изогнуться, не существует.

— Ни влево, ни вправо, а другого направления не существует,— повторил я вслед за доктором Пункто.— Другого направления не существует... Впрочем постойте! Мы просто привыкли думать, что другого направления не существует. Его лишь нельзя наглядно представить себе, но оно существует. Это недоступное непосредственному созерцанию направление перпендикулярно нашему миру. Линии могут казаться нам прямыми, но в действительности быть незаметно для нашего глаза изогнутыми в третьем направлении! Так вполне может быть! А в нашем случае просто не может быть иначе!

— Я не вполне понял то, что вы сейчас сказали,— произнес доктор Пункто,— но если интуиция меня не обманывает, вы видите некое решение проблемы.

— «Вижу» — не то слово,— поправил я своего друга.— К сожалению, я не вижу решения, ибо мне не дано его видеть, но разумом понимаю, каким оно должно быть. Позвольте мне еще немного поразмыслить, а завтра мы продолжим разговор.

На этом мы расстались. Настроение у нас обоих было отличное.

21. СОН О ЦИРКУЛЬЛАНДИИ

Быть может, ночь принесет окончательное решение или хотя бы направит мои мысли в нужную сторону? Ведь ночью во сне нам часто приходят в голову такие логические ходы, до которых мы никогда не додумались бы наяву!

Я возлагал на ночь большие надежды. Ошибиться было невозможно: истина где-то рядом. Правильное решение было теперь настолько близко, что мой разум мог совершить последний шаг и во сне. Я счел полезным еще раз мысленно перебрать основные пункты своих рассуждений. Итак, что мы имеем? Я должен воочию представить себе треугольник, у которого сумма углов больше 180° . Стороны такого треугольника не могут быть прямыми. Они должны быть изогнутыми, непременно изогнутыми, не влево и не вправо, но изогнутыми! Не представляю! Не могу представить! То, что не изогнуто ни вправо, ни влево, но все же изогнуто, мне просто не дано видеть. Стороны такого треугольника изогнуты в некоем невидимом направлении. Изогнуты в невидимом направлении! Как это? Можно ли мысленно представить себе направление, недоступное непосредственному созерцанию? Да, конечно! В нашем мире есть два направления, но Сфера спускается к нам по третьему, не видимому для нас, но вполне видимому для нее направлению, перпендикулярному нашему миру. Не могут ли стороны треугольника быть изогнутыми в третьем, не видимом для нас направлении?

Для нас, живущих в двумерной Флатландии, такое искривление было бы совсем незаметно. Это проще понять, рассмотрев мир одного измерения — Лайнландию. Может ли там существовать некое искривление, не видимое ее обитателям, но заметное для нас?

И тут я увидел перед собой Лайнландию, но не прямую, а изогнутую в виде огромной окружности! Собственно говоря, это была уже не Лайнландия, а Циркульландия! Взгляните! Ее обитатели движутся то в одну, то в другую сторону, но не в силах сойти со своей окружности. Сколько самоуверенности слышится в их жужжании. Ха, а вот и король!

— Сир! — обратился я к монарху. — Ваше величество! Выслушайте меня!

— Кого это я должен выслушивать? — возмутился король. — Я никого не вижу. Уж не того ли злого волшебника, который несколько лет назад поставил под угрозу самое существование моего государства, но успел вовремя скрыться? Пусть он лучше не попадается мне на глаза! Я ему покажу!

— Ваше величество! — произнес я. — Я то самое лицо, о котором вы говорите, но я не только не злой, но даже и не волшебник. Я пришел к вам из мира двух измерений.



Циркуляндия.

— Нет, вы только послушайте, что говорит этот призрак, дух или кто бы он там ни был! Мир двух измерений? Но ведь существует лишь один мир, и он имеет лишь одно измерение. Это мой мир, я правлю им как король и не потерплю возражений ни от моих подданных, ни от кого другого, будь он призрак, дух или волшебник!

— Да послушайте же вы, могущественный владыка! — попытался я прервать короля.

— Вот это обращение по крайней мере учтиво, — откликнулся король. — Я господин и повелитель всего мира, и, естественно, мое могущество беспредельно. Что вам от меня нужно? Уж не хотите ли вы снова завести разговор о другом мире, откуда вы якобы явились? Пустая болтовня! Меня вы не проведете.

— Нет, на этот раз я хотел бы поговорить с вами о вашем собственном мире, — сказал я.

— Прекрасно, — обрадовался король. — Я постараюсь вам как можно понятнее рассказать, как выглядит мой мир. Мне ли не знать его! У вас, насколько я мог понять, совершенно превратные представления о моем мире.

— Слушаю вас, ваше величество.

— Все очень просто, — начал король и добавил менее любезно: — По крайней мере для того, у кого есть разум.

— Слушаю вас внимательно, — произнес я, делая вид, будто не заметил монаршей колкости.

— Мой мир, — начал король, — единственный и неповторимый, ибо другого просто нельзя себе представить. Где разместился бы другой мир? Для него просто не остается места...

— Где же в таком случае нахожусь я? — пришлось мне прервать королевскую речь. — Разве не вне вашего мира?

— Где вы и откуда появились, я не знаю, — сказал король. — Может быть, вы вообще не существуете и лишь снится мне.

— Разве вы забыли, как однажды я слегка дотронулся до ваших внутренностей? — спросил я. — Ведь коснуться их может лишь тот, кто приближается к вашему миру извне. Если угодно, я могу повторить.

— Глупости, — сердито заметил король. — У человека всегда может быть приступ колик. Из этого вовсе не следует, что кто-то непременно должен был дотронуться до его внутренностей извне, из другого мира. Чушь!

— Хорошо, не будем спорить. Расскажите мне лучше, какую форму имеет ваш мир.

— Форма! Форма! Какая бывает форма? Каждое существо может быть длиннее или короче. Как, по-вашему, существа разной длины имеют различную форму? Все существа, независимо от их размеров, находятся в бесконечно большом мире, ибо наш мир беспредельно велик. В обе стороны он простирается до бесконечности.

— Позвольте задать вам еще один вопрос, уважаемый король. Откуда вы знаете, что ваш мир бесконечно велик?

— Станный вопрос! А как может быть иначе? Коль скоро мир возник в одном месте, что может помешать

ему распространяться дальше и дальше? Ведь прямую, сколько ни продолжай, всегда можно продолжить еще дальше, причем неограниченно далеко. Это и есть то, что принято называть бесконечностью.

— А каким образом вы умудряетесь получать сообщения от существ, находящихся от вас бесконечно далеко? Смогли бы вы получить хотя бы один сигнал, свидетельствующий о том, что и в бесконечности есть жизнь?

— Нет, разумеется, нет! Но поскольку у вас есть разум и вы наделены хотя бы некоторой способностью рассуждать логически, то вам все будет понятно. Хотя мир простирается до бесконечности, ниоткуда не следует, что и в бесконечности он обитаем. Даже если бы мы предположили, что на бесконечно большом удалении от нас обитают живые существа, то мы все равно не смогли бы заметить никаких признаков жизни, ибо испускаемые ими вопли дошли бы до нас через бесконечно большой промежуток времени. Кроме того, с увеличением расстояния громкость звука слегка ослабевает. Существует определенная граница, за которой мы перестаем слышать звук. Если вы наделены разумом, то сказанного мной достаточно для того, чтобы у вас создалось представление о том, как выглядит мир. Есть ли у вас еще вопросы ко мне, незнакомец?

— Вопросов больше нет, — ответил я, — зато мне хотелось бы кое-что вам сообщить. Во-первых, я хотел бы заметить, что ваш мир не прямой, а искривленный. Во-вторых, ваш мир не бесконечен, а конечен. По форме он совпадает с фигурой, которую мы, флатландцы, называем окружностью.

— Каким образом, — перебил меня король, — мир может не быть бесконечным? Даже если он ограничен, то должно же быть что-то и за границей мира?

— Ваш мир не бесконечен, — поучительно заметил я, — но он неограничен. Ваш мир образует замкнутую кривую, которая не имеет ни конца, ни начала. Если бы другие обитатели вашего мира не стояли у вас на пути и вы могли бы беспрепятственно двигаться в одном и том же направлении, то спустя некоторое время вы вернулись бы на исходное место.

— Не понимаю, как это может быть, — признался король.

— Здесь-то как раз все ясно,— возразил я,— впрочем, я вас не виню. Ваш мир конечен, поскольку представляет собой окружность — замкнутую кривую.

— Неужто мир искривлен? — спросил король.— Трудно в это поверить!

— Представить себе искривленный мир вы действительно не в силах. Ваш линейный мир искривлен в направлении, которое недоступно вашим ощущениям, ибо оно перпендикулярно вашему миру. Если бы кривизна была значительнее, а мир соответственно очень маленьким, то вы могли бы наблюдать замечательное явление, не уходя для этого далеко от своего «насиженного» места: звук следовал бы вдоль вашего мира, то есть распространялся бы вдоль кривой.

— Мне иногда кажется, что вы нарочно несете несусветную чушь,— сказал король.— Звук следовал бы вдоль нашего мира... А как ему еще следовать? Вы называете это «распространением вдоль кривой». Какая нелепость! Просто невероятно! Кроме того, я не понимаю, что означает слово «кривая». Любой мальчишка в Лайнландии объяснит вам, как происходит распространение звука в действительности.

— Звук в вашем мире распространяется не по кратчайшему пути,— попытался объяснить я.— Точнее говоря, путь, по которому он распространяется, является кратчайшим из возможных в вашем мире, но действительно кратчайший путь лежит за пределами вашего мира.

— Я снова вас не понимаю,— заявил король.

— А между тем это просто,— возразил я,— но не могу же я требовать от вас, чтобы вы поняли то, что не можете себе представить. Не думаю, чтобы вы могли почерпнуть многое у меня, но я узнал от вас чрезвычайно много полезного.

— Вот уж чего никогда бы не сказал, судя по тому, что вы говорите,— не остался в долгу король.

— Вам этого не понять,— произнес я и исчез, или, лучше сказать, Циркульландия расплылась и скрылась во мраке ночи.

Я проснулся. Привидевшаяся мне во сне страна не давала покоя. Она была искривлена в направлении, которое обитатели одномерного мира не могли воспринимать, поскольку оно проходило перпендикулярно их миру.

Не так ли обстоит дело и с нашим двумерным миром? Может быть, стороны треугольников, которые кажутся нам прямыми, искривлены в третьем, не видимом для нас направлении? Такое искривление можно представить себе лишь мысленно, поскольку увидеть его своими глазами нам, флатландцам, не дано. Вот если бы попасть в третье измерение! Единственная возможность убедиться в искривленности треугольников — спросить об этом у Сферы, когда та навестит нас в следующий раз.

Я решил непременно это сделать.

22. ОТКРЫТИЯ СФЕРЫ

Я еле дождался следующей встречи с доктором Пункто. Разумеется, он сразу понял причину моего хорошего настроения и спросил:

— Вам удалось найти решение?

— Нет,— ответил я,— кричать «Эврика!» еще рано, но я убежден, что мне удалось вплотную приблизиться к источнику наших затруднений. Странное явление, состоящее в том, что сумма углов треугольника больше 180° , можно, как я полагаю, объяснить, приняв следующее предложение. Стороны треугольника искривлены, но их кривизна незаметна. Подчеркиваю, незаметна для нас. Стороны треугольника искривлены в направлении, перпендикулярном нашему миру. Трехмерное существо может без труда это заметить. Нам, обитателям двумерного мира, сие не дано.

Затем я рассказал доктору Пункто о том, как во сне увидел Лайнландию, изогнутую в форме окружности, и как тамошний король не мог понять, что его мир искривлен.

— Вот если бы нам удалось разузнать об истинном положении вещей у какого-нибудь обитателя трехмерного мира,— мечтательно произнес доктор Пункто.

Это замечание навело меня на мысль пригласить моего друга к себе на встречу Нового года, где мы можем рассчитывать на свидание со Сферой.

Я посоветовался с женой, она не только не возражала, но и горячо одобрила мой план. Ведь встреча Нового года — праздник, который принято проводить в кругу семьи, предаваясь размышлениям о семейных радостях

и невзгодах. Почему бы нам не пригласить на него нашего нового друга, чтобы не чувствовать себя духовными париями, изгнанными из научных кругов?

Старый год подходил к концу. Последние его недели показались мне месяцами, последние дни — неделями, но наконец наступил предновогодний вечер. Вся моя большая семья была в сборе: моя жена и я, дети и внуки. Пришел к нам и доктор Пункто. Его спокойная, уравновешенная натура, присущая ему непринужденная манера общения покорили всех, и мы чувствовали себя так, словно наша семья пополнилась еще одним членом.

Вечер прошел очень оживленно. Разумеется, я рассказал сказку, затем мы отведали окружностей, испеченных на масле. Время подошло к двенадцати, и мы принялись с нетерпением ожидать, когда пожалует Сфера. Для нашего гостя было непривычно созерцать ее появление: крохотная окружность раздувается, разрастается и наконец достигает максимальных размеров.

После обычного обмена приветствиями я позволил себе подчеркнуть, что нынешний визит Сферы мы ожидали с особым волнением, поскольку доктор Пункто и я столкнулись с важными проблемами, которые нам, по видимому, удалось успешно решить. Однако подтверждение правильности наших предположений кем-нибудь из обитателей Трехмерия было бы чрезвычайно желательным.

Я начал свой рассказ. Сфера слушала меня с неослабным вниманием. Я упомянул о тех трудностях, с которыми столкнулся доктор Пункто при измерении углов треугольников. Чтобы подчеркнуть всю важность и необычность выводов, сделанных доктором Пункто из результатов наблюдений, я подробно остановился на зюкключениях, выпавших на долю ученого. Затем я рассказал Сфере, какое объяснение придумали мы странному явлению, состоящему в том, что в нашем пространстве сумма углов треугольника оказалась больше 180° . Мы предположили, что стороны треугольника не прямолинейны, а искривлены, причем в направлении, перпендикулярном нашему пространству, в силу чего кривизна сторон незаметна наблюдателям-флатландцам.

Когда я закончил свой обзор, доктор Пункто счел необходимым сообщить нашему трехмерному гостю, что честь открытия столь необычайного решения всецело

принадлежит мне. В свою очередь я воздал должное заслугам доктора Пункто. Именно он первым осознал, что обнаруженная невязка не принадлежит к числу случайных ошибок и имеет под собой геометрическую основу.

Нас очень интересовало, что скажет по поводу нашего сообщения Сфера. Довольно долго та молчала. Я понял, чем заняты мысли нашего гостя: он обдумывал, как в своих рассуждениях обойти ряд трудностей, которые для нас, двумерных существ, были значительно серьезнее, чем для обитателей трехмерного пространства. Когда Сфера начала свой рассказ, нам было необычайно приятно отметить, что она поняла и природу наших затруднений, и самый ход нашего решения.

— Более того,— заявила Сфера,— ваше решение абсолютно верно. Еще раз, находясь среди вас, я подумала о том, что настало время сообщить вам более подробные сведения о форме вашего пространства, но потому у меня возникли опасения: мне не хотелось без особой необходимости насильно перестраивать ваши основные геометрические представления. Теперь я могу рассказать вам, что ваш мир, двумерное пространство, не плоский, а искривленный. Я хотела бы также объяснить вам, что это означает. Внешне ваш мир выглядит не как ровная, а как изогнутая поверхность. К сожалению, ограниченность вашего двумерного восприятия не позволяет вам представить наглядно эту картину.

— Нам понятно, о чем вы говорите,— заверил я Сферу.— Обитателю Лайнландии неизвестно, имеет его мир форму прямой или кривой, потому что лайнландец лишен способности воспринимать направление, в котором искривлен его мир. Поэтому вполне может быть, что одномерная Лайнландия в действительности имеет форму окружности и, следовательно, обладает не бесконечной, а лишь конечной протяженностью, хотя и безгранична, то есть не имеет границ, или конечных точек.

— Совершенно верно,— обрадовалась Сфера.— Пользуясь случаем, замечу, что и ваш мир устроен аналогично: он не плоский, а искривленный. Вы живете не на бесконечно протяженной плоскости, а на поверхности большой сферы.

— Не могли бы вы рассказать об этом подробнее? — попросил доктор Пункто,

— Охотно, — согласилась Сфера и продолжала: — Вы знаете и понимаете, что окружность ограничивает некую часть двумерного пространства, а сама является одномерной кривой. Аналогично в Трехмерии сфера, трехмерное тело, ограничена двумерной поверхностью, которая так и называется — поверхность сферы.

— Аналогию можно продолжить, — добавил я. — Гиперсфера, четырехмерное тело, ограничена трехмерной гиперповерхностью.

— Вы, безусловно, правы, — согласилась Сфера, — хотя я не могу представить себе это наглядно так же, как вы — поверхность сферы.

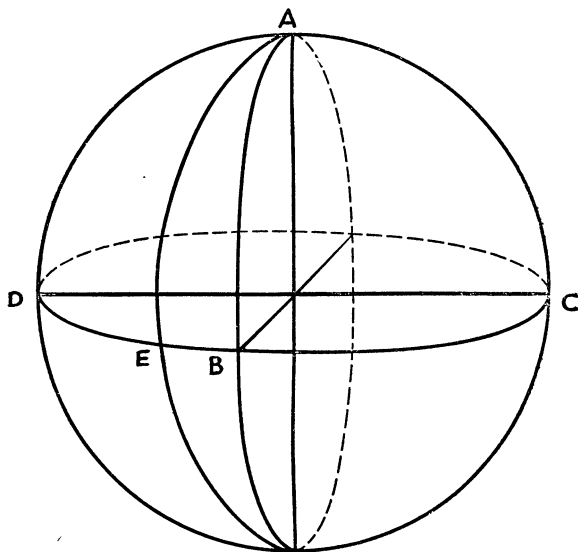
— Итак, — вступил в беседу доктор Пункто, — если я правильно понял, наше пространство искривлено, всюду искривлено, хотя мы этого не замечаем?

— Совершенно верно, — подтвердила Сфера, — так же как искривлена всюду окружность, хотя обитающие на ней лайнландцы не ощущают искривленности своего пространства.

— Но мы же заметили кривизну своего пространства, — отважился заметить я.

— И да, и нет, — ответила Сфера, — Искривленности своего пространства вы бы никогда не заметили, да и не могли заметить. Вы обратили внимание лишь на одно из следствий, к которому приводит кривизна, но и то случайно. Поскольку ваше двумерное пространство искривлено и, следовательно, не является плоским, то сумма углов треугольника не равна 180° . Вы обратили внимание на это обстоятельство и сделали из него вывод, который я считаю необычайно остроумным. Однако, поскольку кривизна пространства недоступна непосредственному наблюдению, ваш вывод оставался не более чем смелой гипотезой. Обычный флатландец, даже если он сведущ в науках, не поймет и, следовательно, отвергнет ваш вывод. Боюсь, что если бы вы попробовали поделиться своими удивительными умозаключениями с соотечественниками, то встретили бы лишь язвительные насмешки. Ваши «сожители» по пространству усомнились бы в ваших умственных способностях. Может быть, некоторые из них и выразили бы желание выслушать вас, но стоило бы вам уйти, как за вашей спиной начались бы разговоры о старческой немощи или оскудении ваших умственных способностей.

— И все же я считаю необходимым выступить в защиту истины,— собравшись с духом, заявил я.— Не только потому, что каждый, кому случилось сделать открытие, испытывает непреодолимую потребность возвестить об этом миру. В данном случае такое выступление необходимо для того, чтобы смыть с доктора Пункто



Сумма углов любого треугольника на поверхности сферы всегда больше 180° . Каждый из углов при вершинах D и E треугольника ADE равен 90° . Следовательно, сумма углов этого треугольника ($180^\circ +$ угол при вершине A) больше 180° . В треугольнике ABC все три угла равны 90° , поэтому их сумма равна 270° .

пятно незаслуженных обвинений. Сначала его подозревали в том, что он преднамеренно произвел ошибочные измерения. Все наши попытки опровергнуть это нелепое мнение привели лишь к тому, что доктора Пункто просто стали считать плохим землемером, который с помощью небылиц пытается оправдать себя. Не пощадила молва и меня. Считали, что, поддерживая дружеские отношения с «погибшим человеком», я рискую своей репутацией и делаю это лишь из рыцарских побуждений, поскольку никаких более основательных причин для столь странной дружбы не существует.

Чтобы сделать нашу гипотезу более понятной,— продолжал я,— мы воспользуемся аналогией с Циркуляндией. На этой модели хорошо видна искривленность одномерного пространства, незаметная для его обитателей. Тому, кто живет в одномерном искривленном мире, невозможно понять, что его пространство искривлено в некоем недоступном его восприятию направлении. Наконец, мы сошлемся на «свидетельские показания» нашего гостя из Трехмерия, наблюдавшего искривленность Флатландии.

Тут я умолк, ибо почувствовал, что несколько увлекся. Никогда не смогу я рассказать где-нибудь, а тем более на общем собрании членов физико-математического факультета, о своих встречах со Сферой. Меня примут за сумасшедшего или подумают, будто я общаюсь с потусторонним миром, что почти равносильно сношениям с самим дьяволом!

Сфера внимательно выслушала меня. Свое мнение она формулировала кратко. Прежде всего она просила нас не разглашать того, что нам известно. Знакомить ученых Флатландии со столь необычными теориями Сфера считала весьма опасным. Они не воспримут столь смелые теории и лишь обвинят нас с доктором Пункто в безумии.

Вскоре Сфера распрощалась и исчезла, предоставив нам самим решать наши проблемы.

23. ТРУДНОСТИ

После исчезновения Сферы мы сидели некоторое время молча. Каждый был занят своими мыслями. Но думали мы, по-видимому, об одном и том же, потому что вид у нас был одинаково мрачный. Причин для радости было мало: хотя теперь мы знали, что наши гипотезы имеют под собой прочную основу, рассчитывать на то, что нам удастся найти единомышленников, не приходилось. Мы твердо стояли на своем, были убеждены в своей правоте, но находились в полной изоляции, и это обстоятельство вряд ли могло служить утешением.

Первым правильность нашей точки зрения должен был бы признать физико-математический факультет, но ученые не разобрались, в чем истина, не приняли наших доводов. Убедят ли наши аргументы, даже подкрепленные

сообщением Сферы, кого-нибудь другого? Чего мы достигнем, если попытаемся вопреки мнению факультета довести наши взгляды до всеобщего сведения? А если наши идеи получают у широкой публики более высокую оценку, чем у факультета? Нет, такое невозможно! Ведь против наших взглядов высказалось ученое общество, приговор которого принято считать беспристрастным. Какие бы аргументы мы ни приводили в подтверждение своей теории, к ним просто не будут прислушиваться.

Я решил спокойно все взвесить и не совершать необдуманных шагов.

— Должны же ученые мужи наконец понять, — сказал доктор Пункто, — что для объяснения необычных отклонений, обнаруженных при измерениях, необходимо выдвинуть какую-то гипотезу. Это единственно возможный подход. Нельзя же мириться с существованием необъяснимых явлений.

— Вполне согласен с вами, — ответил я, — но все не так просто, как кажется. Действительно, для объяснения странных явлений иногда приходится прибегать к странным гипотезам. Но если мы встанем на точку зрения ученых и взглянем на все со стороны, то так ли уж велика необходимость соглашаться с нашими весьма необычными выводами? Ведь до сих пор в правильность результатов измерений не верит никто, кроме нас. Невязки столь малы, что имеют доказательную силу лишь для того, кто достаточно долго занимался изучением результата измерения, и столь удивительны, что несведущему трудно устоять перед искушением и не приписать их ошибкам измерений.

— Сначала мы так и делали, — признался доктор Пункто, — но поскольку ошибки встречаются при любом измерении, то мы каждый раз настраивали свои приборы заново и в конце концов поняли, что невязки обусловлены не ошибками измерений.

— Правильно, — сказал я, — но попытайтесь заставить кого-нибудь затратить столько времени и энергии на нечто такое, что он считает совершенно бесполезным. Наука ищет объяснение твердо установленным фактам, но стремится достичь своей цели при помощи простейших гипотез. Разве не проще предположить, что двое каких-то чудаков заняли, мягко говоря, «необъективную позицию», чем соглашаться с гипотезами о структуре

пространства, которые любому покажутся непонятными и странными? Нет, решительное неприятие подобных гипотез и есть та единственно научная (по крайней мере с точки зрения наших ученых мужей) позиция, которую могут занимать жрецы науки.

Доктор Пункто, мой собрат по науке и товарищ по несчастью, оценивал ситуацию так же, как и я. Мы поняли, что нам придется уступить. Моей жене, расчетливой, как все женщины, наша непосредственность была совершенно непонятна. Любая женщина, даже если она с сочувствием следит за тем, как ее муж преодолевает трудности и невзгоды, связанные с его умственной деятельностью, склонна рассматривать свойственное мужчинам стремление передать свои знания другим как своего рода навязчивую идею.

— Я бы на вашем месте бросила все это! — высказала свое мнение жена. — Пусть наукой занимаются другие, а не те, кому эти занятия не только не приносят никакой пользы, но доставляют одни лишь неприятности!

И хотя доктор Пункто и я расходились во мнениях с моей женой, все же мы не могли не признать, что в нашем положении благоразумнее всего последовать ее совету. Хотя бы на время!

— Если бы нашелся еще хоть кто-то, — мечтал доктор Пункто, — с научным складом ума, способный узреть истину, то нас по крайней мере было бы на одного больше.

— Ну, третьей является Сфера, — возразил я. — Но пока мы не можем просить ее объявиться открыто, ибо нас тотчас же обвинят в колдовстве и в связи с дьяволом.

— Мне бы очень хотелось задать Сфере один вопрос, — вступил в разговор мой сын, до того молча слушавший нашу беседу. — Искривлен ли трехмерный мир в направлении, перпендикулярном трехмерному пространству и, следовательно, недоступном непосредственному восприятию трехмерных существ?

— Очень хорошо, что ты не спросил об этом Сферу, — ответил я. — Она достаточно умна для того, чтобы наблюдать за тем, что происходит в нашем пространстве и недоступно нашему восприятию. Но достает ли ей ума понять, изогнуто ли ее собственное пространство в

направлении, недоступном ее восприятию, мне не известно. И я боюсь, что подобным вопросом мы могли бы поставить Сферу в неловкое положение.

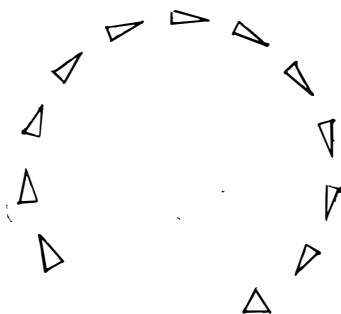
— Я просто не успел спросить у Сферы, она исчезла так неожиданно,— честно признался мой сын,— но мне все равно хотелось бы узнать правильный ответ на свой вопрос.

— Возможно, тебе удастся сделать это позднее. Сейчас нам не следует настраивать Сферу против себя. Мы еще нуждаемся в ее помощи. Очень нуждаемся.

Наша беседа закончилась далеко за полночь, почти под утро. Доктор Пункто отправился к себе домой, а мы разошлись по комнатам и легли спать. Однако прошло немало времени, прежде чем мне удалось заснуть.

24. КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ

На следующее утро я вышел к своим домочадцам довольно поздно, и настроение у меня оставляло желать много лучшего. Зато мой внук был в превосходном расположении духа. Он играл в солдатики—фигурки,



Мой внук выстроил своих солдатиков по кругу.

имевшие форму равнобедренных треугольников с очень острыми углами при вершине. Командиром отряда был равносторонний треугольник.

Внук выстроил одиннадцать солдатиков во главе с командиром по кругу, командир подал команду: «Шагом марш!», и все войско начало маршировать. Сначала сдвинулся с места сам командир, за ним первый солдатик, потом — второй и так далее.

Не знаю, что овладело мною — любопытство или желание отвлечься от нескончаемых мыслей о проблемах пространства, но только я спросил у внука, почему его солдатики начинают маршировать не одновременно. Задавая вопрос, я рассчитывал услышать в ответ:

— Потому, что нельзя передвинуть всех солдатиков сразу.

Каково же было мое изумление, когда внук дал совершенно иной ответ:

— Потому, что солдатики слышат команду не одновременно.

Такой ответ поразил меня. Мальчик полагал, что звук распространяется от источника — командира — по цепочке, от одного солдатика к другому. Подобные физические представления у ребенка его возраста были явлением совершенно необычным, но разве мой внук не происходил из рода математиков и физиков?

Я был очень доволен и хотел, чтобы внук развил свою мысль подробнее. Поэтому я спросил:

— А разве звук распространяется по окружности, вдоль которой выстроены солдатики, а не по прямой — от командира к каждому солдатiku?

Малыш озадаченно помолчал — над дедушкиным вопросом стоило задуматься, — но быстро нашелся:

— Нет, звук распространяется вдоль пути, по которому идут солдаты. Внутри окружности ничего нет.

Разумеется, последнюю «гипотезу» мой внук принял лишь потому, что ему так захотелось. Он стремился к тому, чтобы все вокруг было устроено просто. Солдатики выстроены вдоль окружности, маршируют они тоже вдоль окружности. Почему же звук должен распространяться вдоль различных прямых, идущих от командира к солдатикам и проходящим внутри окружности? С точки зрения моего внука, такое предположение было неоправданно сложным.

Затем мои мысли приняли новое направление. В солдатиках, выстроенных по кругу, я вдруг увидел модель Циркульландии с ее королем, окруженным своими подданными. Окружность, на которой обитал король, была его пространством. Звук королевского голоса распространялся вдоль окружности, то есть не по кратчайшему пути, ибо кратчайший путь проходит за пределами Циркульландии! Я снова вспомнил свой сон. Король

Циркульландии, естественно, не мог понять меня, ибо не знал иного пространства, кроме своего собственного. И то, что он меня не понял, еще не свидетельствует о его глупости. Просто король не мог представить себе то, что лежит вне его пространства. Для него звук распространялся по кратчайшему пути, который возможен в Циркульландии. В школе нас учили, что кратчайший путь между двумя точками — это прямая, но на практике мы не всегда понимаем под кратчайшим путем прямую.

Неожиданно я вспомнил один эпизод, происшедший со мной в юности. Как-то раз я поздно вернулся домой, и отец устроил мне за это нагоняй. Он спросил, шел ли я домой кратчайшим путем. Разумеется, мой путь был далек от кратчайшего, но признаваться в этом мне не хотелось. Лгать я считал ниже своего достоинства и, пытаясь придумать какую-нибудь отговорку, схитрить, сказал отцу:

— Разумеется, я возвращался домой не кратчайшим путем, потому что идти кратчайшим путем просто невозможно.

— Почему, невозможно? — пожелал узнать мой отец.

— Потому, что кратчайший путь — это прямая, а она проходит через дома и другие препятствия.

Я уже неоднократно упоминал о том, что мы приходим из семьи, известной своими научными традициями, поэтому мой отец мог по достоинству оценить мое замечание.

Сейчас я снова задумался над тем, что же такое кратчайший путь. Предположим, что командир игрушечных солдатиков моего внука приказал своим подчиненным прибыть к нему кратчайшим путем. Как они должны поступить: идти к нему по дуге окружности или по прямой, соединяющей то место, где они находились в момент получения приказа, с тем местом, где находится командир, и проходящей внутри окружности?

Вполне может случиться, что командир только и следит за тем, как бы его подчиненные не нарушили строя и не сошли с окружности. Ему и в голову не придет, что солдат может приблизиться к нему по прямой. Не исключено также, что внутри окружности находится какое-то препятствие, например здание или запретная зона. В этом случае задача командира состоит в том, чтобы его подчиненные направлялись к нему не по пути,

кратчайшему с точки зрения геометрии, а по практически наиболее короткому пути, то есть шли вдоль дуги окружности.

Аналогично обстоит дело и в Циркульландии. Король ничего не знает о «территории» внутри окружности. Для него не существует другой возможности, кроме как двигаться в своем собственном пространстве. О том, что возможен более короткий путь, пролегающий за пределами его пространства, король просто не знает. Может быть, до этого мог бы додуматься какой-нибудь особенно проницательный и хитроумный математик из Циркульландии, однако такому гению не удалось бы убедить «собратьев по пространству» в правильности своих выводов. Все, что принадлежит пространству, не может покинуть пределы пространства. Звук также не может выйти за пределы пространства. Следовательно, распространяясь в пространстве, звук должен как бы следовать за кривизной пространства. Странно, очень странно!

Я устал и почувствовал, что больше не в силах размышлять о кратчайших путях и тому подобных вопросах. Незаметно я уснул. Удивительно, но на этот раз мне приснилась не Лайнландия, и я, многомудрый флатландец, не спускался в одномерное пространство, чтобы просветить его обитателей и открыть им истину, известную мне до мельчайших подробностей, поскольку я своим глазом мог созерцать истинное положение вещей, недоступное непосредственному восприятию лайнландца. Нет, мне приснился совсем другой сон. Мне почудилось, будто я — Сфера, гиперокружность из трехмерного пространства, и наношу визит в свой собственный мир, в свою собственную Флатландию. Нет, не Флатландию, а Сферландию, ибо я отчетливо видел, что мир искривлен в направлении, ныне доступном моему созерцанию, направлении, которое ранее мне никогда не доводилось видеть. Теперь я мог рассматривать его сколько угодно, ибо я был Сферой, мудрой Сферой! Ничто в нашем двумерном пространстве не осталось сокрытым от меня. Впрочем, я постиг все без особого труда, ибо был теперь трехмерным существом.

А вот и мой дом! Я смотрел на него сверху, извне нашего пространства, откуда мне никогда не приходилось видеть его. Вон там моя жена. Дети! Внуки! По-

истине поразительное зрелище! А вот и я сам, жалкий двумерный шестиугольник. Я всегда считал себя важной, представительной фигурой, но как убого я выгляжу в действительности, плоское двумерное существо.

Интересно, могу ли я приблизиться к самому себе? Могу ли я рассказать самому себе, как выглядит все, если взглянуть на наше пространство извне? Нет! Я бы ни за что не поверил, ибо слишком глуп! Нет, не глуп, а ограничен, ибо способен воспринимать лишь двумерные картины всего, что окружает меня.

Нет, не буду тревожить старого ученого! Ему и так хватает сложных проблем! Пусть спит споккойно! Лучше я рассмотрю как следует двумерный мир, мой собственный мир, мою искривленную Флатландию. Хотелось бы знать, смогу ли я, проснувшись у себя дома, там, внизу, припомнить все, что мне довелось увидеть? Удивительно! Я вижу под собой весь город с его домами, улицами, деревьями. Отчетливо различаю движение на улицах. Вижу все рядом, совсем близко. Интересно, как такое может происходить во сне? Ведь мне хорошо известно, что я сплю. Какой прекрасный сон! И какой странный!

Я посмотрел направо, потом налево, огляделся по сторонам. Мир, мой мир, простирался подо мной во все стороны, уходя в бесконечность. Впрочем, ведь это невозможно: наш мир не бесконечен. Он не простирается во все стороны неограниченно далеко. Наш мир изогнут, искривлен. Я могу обойти вокруг него, облететь вокруг моего мира, моей сферической Флатландии. Странно! С какой легкостью я представляю себе все это. Просто удивительно! Может быть, меня во сне вдохновила Сфера? Может быть, я смотрю на все глазами своего друга Сферы? Вполне возможно. Что сказать по этому поводу?

Да, у Сферы есть явное преимущество перед нами: она все видит. Хотя особого искусства для этого не требуется. То, что видит Сфера, я постигаю своим разумом, я, флатландец, хотя меня, живущего в сферической Флатландии, правильнее было бы называть сферландцем. Сфере не нужно напрягать свой разум или строить гипотезы: ей достаточно взглянуть на все со своей трехмерной точки зрения.

Интересно, как распространяется свет? Прямо? Вдоль прямых? Нет, конечно же, нет! Лучи света не

могут выходить за пределы пространства, своего пространства. Значит, лучи света должны искривляться вслед за пространством, ибо они лежат в этом пространстве! Нам, обитателям Сферландии, лучи света кажутся прямолинейными. Мы полагаем, будто свет распространяется вдоль прямых. Лучи света действительно не искривлены относительно нашего пространства, а изгибаются вслед за ним. Они просто обязаны вести себя так. Но если взглянуть на Сферландию извне, то лучи света перестанут казаться прямыми, ибо в действительности они распространяются вдоль кратчайших из всех линий, какие только можно провести в нашем пространстве! То же самое можно сказать и о линиях, вдоль которых в Сферландии распространяется звук. Они также не являются прямыми. Но тогда... Хотя Сфера и уступает мне по уму, она все же должна понять, что ее пространство искривлено. Да, да! Ее трехмерное пространство искривлено в некоем невидимом для нее направлении, и лучи света в трехмерном пространстве также отличны от прямых. Свет в трехмерном пространстве распространяется вдоль кратчайших из линий, которые можно провести в этом пространстве. Лучи света должны быть изогнуты в невидимом для обитателей Трехмерия направлении так же, как изогнуто само трехмерное пространство.

— Сфера не может этого не понять. Если она все же не поймет, что ее пространство искривлено, то, значит, я гораздо умнее ее.

Последние слова я произнес громогласно. Я и сам услышал, но было поздно. Неожиданно до меня донесся голос, голос Сферы, с упреком произнесший:

— И ты, плоское двумерное существо, еще осмеливаешься думать, будто ты в чем-то превосходишь меня! Я трехмерна и смотрю на ваш мир сверху вниз. Неблагодарный хвостун! Отправляйся назад, в свой мирок! Одного взгляда на него было достаточно, чтобы я сразу все поняла. А ты еще осмеливаешься ругать меня и принимать за глупца, неспособного понять, что его мир искривлен! Нет, я не вижу кривизны своего мира по той простой причине, что ее не существует. Мой мир плоский. Плоский, понимаешь ли ты это? Ты живешь в искривленном мире, а не я. А теперь довольно, отправляйся к себе назад!

Я проснулся у себя в комнате. Что это было: сон или Сфера действительно вознесла меня в трехмерное пространство? Позволила ли она мне бросить взгляд на мой искривленный мир? Как мне ответить на этот вопрос? Если все это мне не приснилось, то просто ужасно! Я оскорбил Сферу, моего доброго друга и наставника, и она никогда больше не прибудет к нам с визитом под Новый год! Столь же решительно, как в свое время она порвала отношения с моим дедом, Сфера перестанет общаться со мной. Об этом лучше не думать!

ЧАСТЬ IV

РАСШИРЯЮЩИЕСЯ МИРЫ

25. НОВЫЕ НАДЕЖДЫ

Жизнь продолжала идти своим чередом. Мы были столь благоразумны, что избегали ввязываться в дискуссии с противниками наших убеждений. Мир не желал знать истину. К тому же затевать драку было преждевременным, ибо кое-что оставалось еще невыясненным. Может быть, когда-нибудь потом, много лет спустя! Должно же рано или поздно настать время, когда мир станет понятливее!

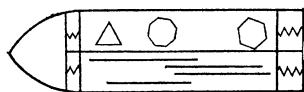
И все же на душе у нас (я имею в виду себя и моего друга Пункто) было тяжело, ибо всякое мыслящее существо, убедившись в истинности какого-нибудь факта, стремится сделать его достоянием другого. Нам оставалось лишь надеяться на будущее. Однако не очень-то приятно, когда каждый смотрит на тебя как на опасного маньяка.

Мы жили спокойно, но интерес к проблемам пространства был у нас в крови, и не случайно мы оказались в числе первых обитателей Сферландии, отправившихся на космическую станцию, сооруженную в верхних слоях атмосферы. Дело было новым, ибо при строительстве станции пришлось полностью отказаться от всех

традиционных взглядов на возведение зданий. Как известно, наши дома остаются на своих местах благодаря действию слабой силы притяжения, которая всюду направлена к центру нашего круглого мира. Объяснить, каким образом дома не витают в атмосфере, а стоят неподвижно, не так-то просто. Кое-что на эту тему я уже говорил раньше. Однако никогда прежде не удавалось возводить здания на такой огромной высоте, где воздух столь разрежен. Затея стала возможной лишь благодаря одному техническому изобретению, сделанному совсем недавно.

Естественно, строители космической станции столкнулись с двумя трудностями. Во-первых, все строительные материалы необходимо было доставить в точку, находящуюся на огромной высоте. Для забрасывания материалов была построена специальная катапульта, которая выстреливала все необходимое в нужном направлении и с надлежащей скоростью. Персонал, находившийся на строительной площадке, ловил прибывшие материалы, которые к тому времени двигались уже с небольшой скоростью. Наконец космическая станция была готова. И хотя пускали в нее далеко не всех желающих, при соответствующей заинтересованности все же можно было добиться разрешения и посетить уникальное сооружение. Нужно ли говорить, что, когда Пункто предложил мне взглянуть на космическую станцию, я тотчас же согласился. Моя жена выразила желание сопровождать нас, и в заранее назначенное время мы втроем оказались в космическом корабле, установленном на катапульте.

Космический корабль представлял собой комфортабельную кабину с двумя отсеками: один предназначался



Космический корабль с командиром и пассажирами на борту.

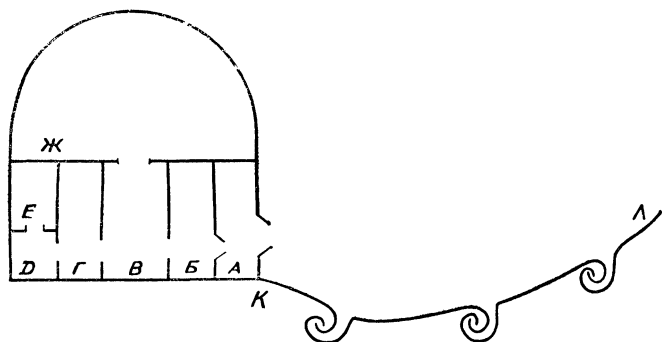
для мужчин, другой для женщин. В мужском отсеке было четыре места. Кроме Пункто и меня, в нем разместился и командир корабля. Во время полета ему не довелось что-либо делать. Однако на непредвиденный

случай хорошо было иметь рядом опытного специалиста. Мы старались не думать о возможных происшествиях, зная, что пассажиры склонны преувеличивать страхи. В худшем случае нам грозило столкновение с каким-нибудь предметом, но, к счастью, вероятность такого столкновения чрезвычайно мала. Нельзя полностью исключить возможность столкновения со встречным космическим снарядом, например снарядом, выпущенным другой космической станцией, который отклонился от заданной траектории. Если бы где-нибудь внизу произошел взрыв, то обломки также могли бы взлететь в пространство, но для этого взрыв должен был быть необычайно мощным по сравнению с теми, которые обычно происходят в силу рокового стечения обстоятельств. Гораздо реальнее была возможность вылететь со старта со скоростью, которая больше или меньше расчетной. На мой вопрос о том, сколь вероятно подобное происшествие, командир корабля лаконично ответил, что инженеры все тщательно рассчитали и ошибка практически исключается.

Рядом с отсеком для мужчин располагался отсек для дам. Нетрудно понять, сколь разумна такая мера предосторожности: при отправлении космического корабля все, кто находится на его борту, испытывают сильный толчок и, не будь специального дамского отделения, присутствие женщин на борту космического корабля создавало бы серьезную угрозу для жизни остальных пассажиров и командира. Женщины с их остроконечными телами могли бы при внезапном толчке нанести своим соседям тяжелые увечья. Их отсек был настолько узким, что пассажирки не могли в нем повернуться. Кроме того, упругие стенки, ограждавшие пассажирскую кабину спереди и сзади, также смягчали толчки. В дамском отсеке можно было одновременно разместить целый «пучок» женщин.

Толчок при отправлении все пассажиры ощутили довольно явственно. Сила притяжения к центру Земли у нас не очень велика, поэтому отпадает необходимость придавать космическому кораблю большую начальную скорость. При отправлении мы изрядно волновались, ибо все, кто впервые отправляется в подобный рейс, всегда немного побаиваются, но сильные пружины, вмонтированные в стенки кабины, смягчили толчок. Перелет

показался мне довольно продолжительным и скучным. В точно назначенный срок я увидел конечную станцию, а несколько мгновений спустя мы уже спокойно лежали в приемной сети. Полет окончился. Можно было выходить. Однако на столь большой высоте царил холод, а воздух был разрежен, поэтому нас через особый воздушный шлюз провели в теплое помещение, внутри которого поддерживалось нормальное давление. Здание космической станции было абсолютно герметичным. Оно состояло из двух отсеков, или ярусов. В нижнем



Космическая станция (КЛ — приемная сеть, А — воздушный шлюз, Б — столовая, В — конференц-зал, Г — читальный зал, Д и Е — подсобные помещения, Ж — обсерватория).

отсеке находились различные помещения: читальный зал, конференц-зал и столовая, в верхнем — зал «наружных наблюдений», или, если можно так выразиться, «обсерватория». Она представляла собой огромное помещение, огороженное сверху «крышей» из какого-то прозрачного материала. Находясь в обсерватории, многочисленные экскурсанты могли одновременно любоваться фантастически красивым видом, открывавшимся перед ними.

Мы долго стояли, охваченные восторгом при виде величественного зрелища. Здесь, на борту космической станции, невольно забываешь о всех мирских невзгодах, ибо мир лежит где-то далеко внизу! Взгляд устремляется в бездонные глубины Вселенной! Вселенной! Ход моих размышлений прервался. Бездонные глубины нашей Вселенной, нашего конечного пространства двух измерений,

хотя и искривленного в невидимом для нас третьем направлении, но все же конечного!

Мы увидели множество светил, плававших в пространстве, миров, подобных нашему, или, если говорить возвышенным стилем, «Вселенных». Одни из них, находившиеся на сравнительно небольшом расстоянии, казались светящимися черточками, другие, расположенные дальше,— точками. Светила, отделенные от нас особенно большими расстояниями, были едва видны из-за сильного поглощения света в межзвездном пространстве.

Одна из дам спросила у экскурсовода, демонстрировавшего нам красоты Вселенной, обитаемы ли другие миры и как выглядят существа, живущие там. Он ответил ей кратко и по существу, что пока ничего не известно. Обсерватория для того и построена, чтобы попытаться ответить на эти вопросы. Ведутся тщательные наблюдения, и вполне возможно, что в ближайшие годы удастся получить какие-нибудь обнадеживающие результаты.

— Эту космическую станцию впоследствии можно было бы великолепно использовать как отправной пункт при посылке экспедиции на другие миры,— указала предположение моя жена.

— Ты совершенно права,— согласился я,— и, быть может, мы еще доживем до того времени, когда исследователи полетят на другие миры. Существующие ныне катапульты недостаточно мощны для того, чтобы можно было долететь даже до ближайшего из них.

Доктор Пункто не слышал, о чем мы говорили, поскольку был погружен в размышления. По-видимому, мысли его приняли совсем другое направление, ибо он неожиданно произнес:

— Поскольку пространство искривлено, то мы можем увидеть вдали самих себя, то есть свою собственную Вселенную.

— Где? В каком направлении? — спросила моя жена.

— Этого я не знаю,— сказал доктор Пункто. Может быть, один из тех далеких миров, кажущихся нам едва заметными точками, и есть та Вселенная, в которой мы обитаем.

— Неужели наш мир действительно виден? — усомнилась моя жена.

— Конечно, виден,— сказал я.— Ведь его линейные размеры не слишком велики, то есть наш мир не слишком велик.

— Звучит как шутка, хотя это и абсолютная истина,— подтвердил доктор Пункто.— Наш мир не слишком велик. Наш искривленный мир не бесконечен.

— Говорите, пожалуйста, тише,— взмолилась моя жена,— не то вас услышат и подумают, что мы не вполне нормальны.

Она испуганно оглянулась. На сей раз все обошлось благополучно! Нам приходилось быть осторожными.

Желая отвлечь от нас внимание, я громко спросил: — А как велики расстояния до других миров?

Экскурсовод, решивший, что вопрос обращен к нему, ответил:

— Пока неизвестно. Наша космическая станция произвела несколько измерений, но полученные результаты ненадежны, поскольку измеряемые расстояния чрезвычайно велики.

26. ИЗМЕРЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

Последнее замечание произвело на доктора Пункто сильное впечатление, ибо на обратном пути он только и говорил, что об измерении расстояний. Наш экскурсовод, возвращавшийся вместе с нами, не мог сообщить доктору Пункто ничего нового. Он не имел ни малейшего представления о том, как производится измерение расстояний.

— Мне непонятно,— сказал доктор Пункто,— как можно измерять расстояния до удаленных миров с неподвижной станции. Чтобы определить расстояние до какого-нибудь предмета, необходимо наблюдать его из двух точек, необходимо иметь базис. По длине базисного отрезка и двум углам, образуемым направлениями на интересующий нас предмет из концов отрезка, можно вычислить расстояние до предмета.

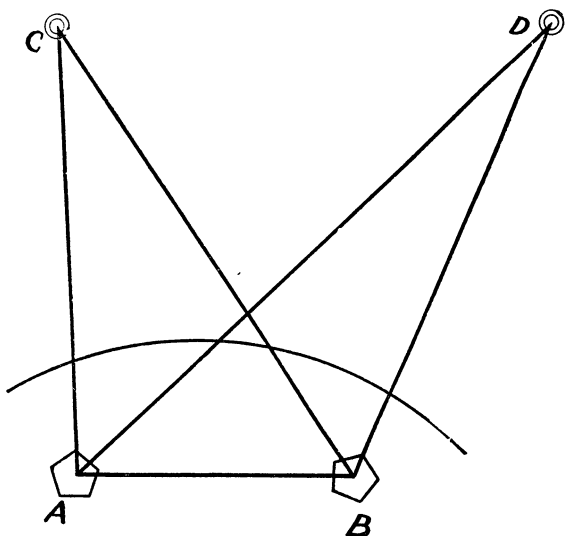
— Но ведь точно таким же способом можно измерить расстояние и до недоступного предмета,— заметил я.

— Разумеется,— согласился доктор Пункто.— Я хотел лишь сказать, что одной космической станции

недостаточно для измерения расстояний до других миров.

— Почему? Ведь обсерватория на космической станции занимает обширное помещение,—вмешалась в разговор моя жена.

— Вы совершенно правы,—подтвердил доктор Пункто,— но по сравнению с чудовищными расстояниями,



Определение расстояний при помощи триангуляции (построения треугольников). (Длина базиса AB известна. Углы при вершинах A и B доступны измерению. По стороне и двум примыкающим к ней углам нетрудно вычислить расстояние до светил C и D .)

отделяющими нас от ближайших миров, размеры ее чрезвычайно малы.

— А разве нельзя каким-нибудь другим способом измерять расстояния из одной точки? — задала новый вопрос моя жена.

— Это невозможно,— тотчас же возразил я.

— Но ведь заранее известно,— продолжала настаивать она,— что более удаленные светила кажутся менее яркими, чем ближние, поскольку пространство заполнено веществом, поглощающим свет.

Замечание было вполне уместно, и я не мог не восхищаться мудростью своей супруги. Мне пришлось признать ее правоту, но объяснить, что предлагаемый ею метод измерения расстояний дает весьма грубые результаты и единственным методом, позволяющим достичь точности, требуемой в научных исследованиях, остается метод измерения треугольников.

— Тогда необходимо построить вторую космическую станцию,—заявила моя половина.

— Вы совершенно правы,—согласился с ней доктор Пункто, — но до сих пор обходились измерениями, производимыми с одной космической станции, и предложение построить на небольшом удалении от первой вторую такую же станцию встретит сильные возражения.

— В таком случае не обязательно создавать вторую станцию столь же больших размеров, как и первую. Кстати сказать, на строительство второй станции и времени потребуется меньше, — заметила в ответ моя жена, и снова с ее доводами нельзя было не согласиться.

По возвращении о докторе Пункто не было ни слуху ни духу. Позднее мне стало ясно, почему он так таинственно исчез. В голове у моего друга созрел план проведения обширной серии новых измерений. В течение нескольких недель доктор Пункто ни разу не появился у нас, и мы оставались в неведении относительно обширных приготовлений, которые он тем временем проводил. Доктор Пункто не только пытался заинтересовать своим проектом различных представителей власти, но и попытался вступить в контакт с учеными физико-математического факультета. Он всюду встречал довольно любезный прием, а к предложенному им проекту специалисты отнеслись не только с живым интересом, но и с сочувствием. Проведение более тщательных и точных измерений расстояний между небесными телами, безусловно, входило в число задач, стоявших перед наукой, и факультет охотно одобрил проект доктора Пункто. Власти, сначала было возражавшие против якобы бесполезных расходов на строительство второй космической станции, в конце концов убедились, что речь идет о проекте, способном принести науке огромную пользу. Что же касается финансовых затрат, то проект предусматривал строительство второй космической станции лишь самой простейшей конструкции.

Прогрессивные методы, применявшиеся при строительстве большой космической станции, позволили значительно сократить предполагаемые расходы. Кроме того, систематические визиты заинтересованных лиц позволили собрать внушительную сумму. Появилась надежда, что в недалеком будущем добровольные пожертвования позволят выделить средства и на строительство малой обсерватории.

Убедившись в том, что затеянное им дело «на мази», доктор Пункто зашел к нам поделиться приятными новостями. Больше всего нас обрадовало сообщение о том, что ему снова поручено возглавить измерения.

Назначение на пост руководителя важнейших измерений состоялось только потому, что мой друг пользовался заслуженной репутацией самого дотошного и скрупулезного землемера во всей стране. Опасениями относительно того, что вновь повторится странный случай, когда лучший землемер пытался объяснить малые невязки в измерениях углов треугольников противоречащими здравому смыслу предположениями, на сей раз можно было пренебречь, поскольку речь шла лишь об измерении расстояний. Ведь у каждого треугольника теперь требовалось измерять лишь по два угла, поэтому можно было не опасаться, что третий угол в сумме с двумя измеренными даст величину, отличную от 180° .

Превосходное настроение доктора Пункто говорило само за себя. Строительство его маленькой обсерватории шло полным ходом. Когда все было готово, моя жена и я стали первыми посетителями малой космической станции.

Так же как и ее предшественница — большая станция, малая обсерватория доктора Пункто состояла из двух отсеков. В нижнем размещались кабинет директора и комнаты сотрудников, в верхнем — наблюдательная площадка. При первом осмотре обсерватория вызвала у меня разочарование не только малыми размерами наблюдательной площадки, но и отсутствием прозрачного купола. Однако доктор Пункто объяснил, что измерения лучше производить на открытом воздухе, а не сквозь прозрачную стенку. Что же касается вычислений, то ими он занимался в своем кабинете, где имелось отопление и поддерживалось нормальное давление воздуха.

Доводы доктора Пункто мы сочли вполне разумными, но моя жена, ожидавшая увидеть изящный прозрачный купол, все же была несколько разочарована.

Посетили мы и другую станцию. Никакой связи между обоими наблюдательными постами не поддерживалось. Это создавало определенные неудобства, но специальное сообщение с помощью катапульты было трудно осуществимой задачей. Поэтому для того, чтобы попасть с одной обсерватории на другую, сначала приходилось спускаться вниз, а затем вновь подниматься вверх.

На главной станции был воздвигнут большой прозрачный купол, сквозь который ученые могли спокойно, не боясь праздных экскурсантов, производить наблюдения за светилами.

Так доктор Пункто приступил к своей новой работе. Вместе с помощниками он измерил расстояния до различных Вселенных и нанес все космическое пространство на карту. Мой друг воспрянул духом и словно переродился. Он с голвой ушел в выполнение важной, общественно значимой работы, вновь получил возможность заниматься любимой профессией. Его прежние «ошибки» и «заблуждения» были преданы забвению. Доктор Пункто вновь обрел всеобщее уважение.

27. РАССТОЯНИЯ ВОЗРАСТАЮТ

Первое время доктор Пункто заходил к нам довольно регулярно, но спустя несколько месяцев его визиты неожиданно прекратились. Я знал, что наш друг не болен, поскольку мне довелось несколько раз случайно встречать его, но он всегда очень спешил и поговорить нам было некогда. Чаще всего такая торопливость свойственна тем, кто либо сам занят срочной работой, либо отвечает за других исполнителей какого-нибудь экстренного задания, поэтому, приглашая доктора Пункто к нам в гости, я не проявлял особой настойчивости. Рано или поздно, надеялся я, ему самому захочется посидеть в тесном семейном кругу и обменяться самыми сокровенными мыслями. Доктор Пункто хорошо знал, что в нашем доме его всегда ожидает самый сердечный прием, и я спокойно ожидал, когда мой друг выберет удобное для себя время и навестит нас. Но однажды моя жена, вернувшись домой, рассказала, что повстречалась

с доктором Пункто. Он плохо выглядел и был чем-то расстроен. Нужно ли говорить о том, что я решил, не мешкая, повидать своего друга и попытаться разузнать о его самочувствии и делах.

Подстроить «случайную» встречу было совсем не трудно. Я знал, в котором часу доктор Пункто каждое утро проходит по одной и той же улице. Признаться, я немного волновался, отправляясь на встречу со своим другом. Разумеется, увидев меня перед собой, он не мог продолжать свой путь и не ответить на мои вопросы (не долго раздумывая, я спросил его о первом, что пришло в голову):

— Как поживаете? Как дела?

Доктор Пункто хотел было ограничиться лаконичным «Все в порядке, но работы многовато» и продолжить свой путь, но я задал ему еще один вопрос:

— Не встретились ли вам какие-нибудь затруднения при обработке измерений?

Ответ доктора Пункто «Да, то есть я хочу сказать, нет» встревожил меня. Однако доктор спешил. Мы распрощались, и я долго смотрел ему вслед. Моя жена, несомненно, была права: с доктором Пункто что-то стряслось.

Дома мы долго обсуждали происшествие и строили различные догадки. Может быть, у доктора Пункто возникли какие-то трудности в руководстве персоналом? Может быть, снова всплыли старые обвинения, наносящие ущерб его достоинству? Но все это были не более чем предположения, ничего определенного мы не знали.

— Мы должны настоятельно просить его прийти к нам в гости,— высказала свое мнение жена.

— Но доктору Пункто хорошо известно,— возразил я,— что мы ему всегда рады и у нас в доме он может откровенно рассказать о любых своих затруднениях. Мне кажется, что он непременно придет к нам, как только почувствует, что самостоятельно не может решить проблему.

Моя жена все же считала, что следует пригласить доктора Пункто. Если он не пожелает воспользоваться нашим приглашением, то мы, разумеется, настаивать не станем. Но ведь вполне возможно, что нашему другу недостает лишь незначительного толчка извне, чтобы он смог решиться рассказать нам о своих неприятностях.

Однако я всегда считал неудобным предлагать непрошеную помощь и поэтому не соглашался без обиняков пригласить доктора Пункто прийти к нам. К счастью, моя жена оказалась более решительной. Встретив случайно доктора Пункто, она напрямик заявила ему:

— Господин Пункто, мы так давно не видели вас, что нам очень хотелось бы поговорить с вами у нас дома.

— У вас какие-нибудь неприятности? — спросил Пункто.

— Нет, мы просто обеспокоены, что они есть у вас, — ответила жена.

— Неужели это бросается в глаза? — с явным испугом отшатнулся доктор Пункто.

— Мы достаточно знаем друг друга, — успокоила его моя жена, — и вам известно, с каким интересом и участием неизменно относились к вам и к вашей работе у нас в семье. Не могли бы вы зайти к нам сегодня вечером? Никого из посторонних у нас не будет.

И, не дождавшись ответа, она ушла.

Нужно отдать должное моей жене: приглашение доктору Пункто было передано весьма тактично. Когда настал вечер и Пункто наконец пришел к нам, я приветствовал его самым сердечным образом:

— Мы очень рады снова видеть вас у себя. Вы знаете, сколь высоко мы всегда ценили ваши визиты и сколь охотно обсуждали с вами разнообразнейшие темы.

— Я никогда не сомневался в вашем дружеском расположении, — ответил доктор Пункто, — но боюсь, что как гость я сейчас мало приятен. Полгода все шло превосходно. Мы были веселы и жизнерадостны, но сейчас все резко изменилось. Боюсь, что мой приход омрачит ваше настроение.

— Уж не забыли ли вы, — напомнил я доктору Пункто, — что раньше мы имели обыкновение обсуждать вместе все трудные проблемы и не одну из них нам удалось довести до благополучного разрешения?

— Я помню, но, надеюсь, и вы не забыли, что однажды я навлек на вас неприятности, — возразил доктор Пункто. — Нас сочли безумцами, парой выживших из ума маньяков, которые вбили себе в голову нелепейшие

идеи. Я не могу и не хочу навлекать на вас новые неприятности.

— Неужели положение столь серьезно? — воскликнул я, и по моему взгляду доктор Пункто понял, что я слушаю его с неподдельным участием.

— Очень серьезно. Я снова зашел в тупик, — печально признался мой друг.

— В таком случае мы приложим все силы, чтобы найти какой-нибудь выход, — предложил я.

— Мой муж и я не оставим вас в беде, — поддержала меня жена.

— Не сомневаюсь, что мог бы на вас положиться, — сказал доктор Пункто, — но прошу извинить мою настойчивость: мне не хотелось бы обсуждать эту проблему ни с кем. Я просто не знаю, с чего начать.

— Мой лучший друг, — попытался я возразить доктору, — вы нас серьезно обидите, если откажетесь от нашей помощи.

И доктор Пункто не устоял.

Наш гость принялся рассказывать о том, как он приступил к руководству измерениями. Исследователи сразу же столкнулись с двумя трудностями. Во-первых, измерения с обеих космических станций необходимо было проводить одновременно. Во-вторых, наблюдатели, находившиеся в различных обсерваториях, должны были визировать одно и то же небесное тело. Если наблюдатели направили бы свои инструменты на различные светила, то результат измерения был бы полностью ошибочным и указывал бы расстояние до несуществующего объекта.

После введения некоторых усовершенствований обе трудности были преодолены. Для проверки измерений директор время от времени приказывал повторять на выборку некоторые серии наблюдений, и совпадение результатов неизменно оказывалось превосходным.

Когда измерения были закончены, приступили к самой важной части работ. Были вычислены координаты множества миров, расположенных и сравнительно близко от нашего мира, и совсем далеко от него. Полученные данные позволили нанести все эти небесные тела на карту.

После нескольких недель напряженной работы директор предоставил всему персоналу двухнедельный от-

пуск и сам решил отдохнуть, с тем чтобы потом с новыми силами приняться за работу.

Вернувшись после отпуска, доктор Пункто для вящего спокойствия распорядился повторить несколько ранее произведенных измерений. Сотрудники космических станций заново измерили расстояния до нескольких светил, расположенных на различном удалении. Результаты измерений не совпали! Что же случилось? Сначала доктор Пункто решил, что разладились измерительные инструменты, но, сколько он их ни осматривал, никаких неисправностей обнаружить так и не удалось. Тогда доктор Пункто распорядился повторить все ранее проведенные измерения и тщательно сравнить все результаты. Все расстояния изменились! Они возросли, одни больше, другие меньше. В чем здесь дело? Как можно объяснить столь странное явление? Почему все измеренные расстояния не просто изменились, а изменились в одну и ту же сторону? Ясно, что доктор Пункто, по своему опыту знавший, как подозрительно относятся власти ко всякого рода непонятным явлениям, не без оснований опасался, что его вновь могут обвинить в неточных измерениях, небрежности и, быть может, даже в мошенничестве. Катастрофа неотвратимо надвигалась. Физико-математический факультет, осуществлявший контроль за производством наблюдений, потребовал от доктора Пункто подробный ответ о полученных результатах — ученых интересовали цифры. Все выплыло наружу, и заключение, к которому пришли специалисты, отнюдь не было благоприятным для доктора Пункто.

Большинство членов физико-математического факультета склонялись к тому, что доктора Пункто следовало бы уволить, но городские власти, не желая принимать опрометчивые решения, предоставили директору двух космических обсерваторий двухмесячный отпуск по болезни. Персоналу обсерваторий предложили временную работу в другом месте, чтобы в нужный момент возобновить измерения.

После двухмесячного отдыха доктор Пункто вновь приступил к работе, со страхом спрашивая себя, что покажут новые измерения. К величайшему огорчению, он вновь обнаружил, что все расстояния до небесных тел возросли еще больше. Создавалось впечатление, будто светила разбегаются во все стороны. Но правильно ли

такое заключение? Во всяком случае, оно весьма странно.

Вот о каких трудностях поведал нам наш гость. Для непредвзятого исследователя обнаруженное явление представляло несомненный интерес, но для доктора Пункто события оборачивались иначе. Городские власти, поручившие ему проведение измерительных работ, прислушивались к мнению физико-математического факультета, а его членам, с недоверием относившимся к доктору Пункто, все происшедшее представлялось в ином свете.

28. В ПОИСКАХ ПЕРВОПРИЧИНЫ

— Не могут расстояния увеличиваться просто так! Для этого должна быть какая-то причина! — последовала первая реакция с моей стороны.

— Ты слишком торопишься с выводами, — возразила моя жена.

— И все же я считаю, что какая-то причина непременно должна быть, — заявил я. — Примем это утверждение за исходный пункт наших рассуждений. Причина должна быть! Слишком мала вероятность того, чтобы все расстояния безо всякой причины вдруг начали возрастать. Когда стрелок целится в мишень, не все его выстрелы попадают точно в центр. Большая часть пуль отклоняется от центра, одни вправо, другие влево. Может случиться, что слева от центра мишени окажется больше попаданий, чем справа. И при очень большом числе выстрелов число попаданий слева от центра мишени не будет в точности равно числу попаданий справа, но разность между числом тех и других попаданий будет невелика. Если же окажется, что из сотни произведенных выстрелов ни один не попал в цель или нет ни одного отклонения вправо от центра мишени, а есть лишь отклонение влево, то каждый сразу поймет, в чем здесь дело: односторонние отклонения обусловлены какой-то причиной. При осмотре может выясниться, например, что оружие неисправно или что пули ветром сносило влево.

— Вы совершенно правы, — согласился со мной доктор Пункто. — Какая-то причина действительно должна быть, но какая?

— Может быть, небесные тела сносит ветром, дующим на нас откуда-нибудь сверху? — сказала моя жена.

— Это невозможно, — ответил доктор Пункто. — Чем выше мы поднимаемся, тем разреженной становится атмосфера. Межзвездное пространство следует считать лишенным воздуха, поэтому о дующем там ветре не может быть и речи.

— Я это хорошо понимаю, — согласилась моя супруга, — но просто не могу представить себе других причин.

— Мы также еще не обнаружили причины, успокоил я свою жену, — но она существует, должна существовать! Я убежден в этом и надеюсь, что доктор Пункто также разделяет мое мнение.

— Вполне, — подтвердил доктор Пункто. — Я не решился высказать это сам, но согласен с вами. Мне было трудно выдвигать какие-либо гипотезы из опасения, как бы вы не подумали, будто я ищу причину лишь для того, чтобы свалить на нее вину за плохие измерения.

— О плохих измерениях не может быть и речи, — заявил я. — Я хорошо знаю вас как дотошного наблюдателя и не сомневаюсь в точности произведенных вами измерений. Я убежден, что причину обнаруженного вами явления — разбегания миров — следует искать в природе вещей.

— Но мы не можем довольствоваться одной лишь ссылкой на природу вещей, — заметил Пункто. — Необходимо понять причину явления, а ни малейшего шанса найти ее я не вижу.

— Зачем заранее отчаиваться? — попытался я успокоить своего друга. — Необходимо сначала проанализировать все факты и попытаться установить причину. Мы не вправе оставлять надежду на успешный исход поиска, прежде чем будут испробованы все средства.

— Я давно размышляю над загадочной причиной разбегания небесных светил, — произнес упавшим голосом доктор Пункто, — но безрезультатно. Не всегда нам удастся проникнуть в тайны природы.

— Мы должны приложить все усилия, чтобы раскрыть эту тайну. Во всяком случае, перед нами весьма интересная проблема, — было мое мнение.

Доктор Пункто глубоко вздохнул и сказал:

— Разумеется, я весьма признателен вам за вашу готовность помочь мне, но боюсь, что на этот раз нам не

удастся добиться успеха. Мне кажется, что мы не сумеем разрешить загадку, которую задала нам природа.

— Не оставьте же вы меня без помощи? А вместе мы могли бы поддерживать друг друга всеми возможными способами! — воскликнул я.

— Вы несколько извратили положение дел, — удивился Пункто. — Разве вы нуждаетесь в моей поддержке? Я попал в затруднительное положение, и я обращаюсь к вам за помощью.

— Не будем спорить. Объединим наши силы, — примирительно сказал я. — Как и в предыдущем случае, будем обсуждать все идеи и предположения. Совместными усилиями в подобных случаях удастся продвинуться дальше, чем одному. Начнем завтра же. Решено?

— С удовольствием, — согласился доктор Пункто, — но... как начать? С чего вы хотели бы начать?

— Прежде всего, — сказал я, — мне хотелось бы взглянуть на численные данные. Не для того, чтобы проверить их или искать возможные ошибки. Я хочу посмотреть, не удастся ли нам извлечь из них что-нибудь полезное. Может быть, эти данные подскажут нам какую-то идею.

Доктор Пункто нашел мое предложение разумным, и мы условились о том, что на следующее утро я загляну к нему, чтобы просмотреть выкладки и познакомиться с их результатами. Наш гость покинул нас лишь поздно ночью. Настроение его заметно улучшилось.

На следующее утро я сидел в рабочем кабинете доктора Пункто. Мой друг подробно объяснил мне, как производились измерения и как обрабатывались численные данные. Вскоре я с головой погрузился в проблему. Прошло несколько дней, прежде чем я стал свободно разбираться во всех ее тонкостях, но в конце концов мы с доктором Пункто могли свободно обсуждать проблему во всех ее подробностях.

Пункто считал, что обсуждать нам по сути дела нечего, поскольку все факты в равной мере известны и мне, и ему. В этом доктор Пункто, несомненно, был прав.

— Попытаемся выяснить, — предложил я, — сколь велики могут быть вариации в результатах измерений, для того чтобы, производя вычисления с измененными данными, мы могли получить один и тот же результат.

— Что вы имеете в виду, говоря об измененных данных? — переспросил доктор Пункто. — Изменить базис мы не можем. Для этого нам понадобилось бы испросить у городских властей средства на строительство новой обсерватории. Если учесть, что полученные результаты не внушают особого доверия, то особенно рассчитывать на их согласие не приходится.

— А нельзя ли придумать совершенно иной метод измерения расстояний от нашего мирка до небесных тел? — решил спросить я.

Вопрос казался мне совершенно излишним, я не возлагал на него никаких надежд, но когда занимаешься поиском истины, то не следует упускать ни одной возможности. Мой вопрос, строго говоря, был обращен не к доктору Пункто, а к нам обоим. Ни один из нас так и не смог на него ответить.

Направляясь к своему дому, я мысленно перебирал самые разнообразные способы измерения расстояний. Подлежащее измерению расстояние мы могли бы пройти, а затем оценить его величину по времени, в течение которого мы находились бы в пути, но в данном случае такой способ абсолютно неприменим. Можно было бы выпустить снаряд в сторону интересующего нас небесного тела и засесть время, которое пройдет от выстрела до попадания в цель. Хотя этот способ столь же мало пригоден, как и. Впрочем, над ним стоит подумать. Почему бы в самом деле не воспользоваться снарядом? Каким еще способом можно было бы измерять расстояния? Ответа на эти вопросы мне найти не удалось.

Всю ночь я не мог заснуть. Вновь ожили в моей памяти подробности наших прежних поисков. Я снова увидел перед собой Лайнландию, услышал разглагольствования ее короля, о том, как он измеряет расстояние до своих подданных по времени, которое необходимо, чтобы услышать ответ на испущенный им вопль. От подданных, расположенных поблизости от короля, ответ приходил мгновенно, но, чтобы услышать ответный крик от тех, кто жил на значительном удалении, приходилось какое-то время ждать. По этой задержке король и судил о расстоянии, отделяющем его от того или иного из подданных. А нельзя ли и в нашем пространстве измерять расстояния при помощи звука? Нет, это невозможно: звук не мог бы распространяться в безвоздушном

пространстве, отделяющем нас от других миров. А что если попытаться измерять расстояния при помощи света? Свет — вот ключ к решению! Свет позволит нам измерить расстояния до небесных тел! Но как узнать, сколько времени шел к нам луч света от какого-нибудь далекого светила? Ведь нам не известно, в какой момент времени луч света покинул это светило. Значит, и свет не подходит для измерения расстояний. Утомленный своими бесплодными размышлениями, я заснул.

При первой же встрече с доктором Пункто я рассказал ему о своих размышлениях. Расстояния можно было бы в принципе измерять при помощи звука и света, но, к сожалению, добавил я, оба способа непригодны.

— Кажется, что один из способов все же не безнадежен, — возразил доктор Пункто. — Мы не можем точно определить тот момент времени, когда посланный нами световой сигнал достигнет далекого небесного тела. Нам неизвестно также, когда был испущен световой сигнал, пришедший к нам от него. Но, быть может, нам удастся послать световой сигнал, который дойдет до конца и снова вернется к нам. Измерив время, которое требуется свету, чтобы пройти путь туда и обратно, мы смогли бы вычислить расстояние. Именно так оценивал дальность король Лайнландии: он издавал звуковой сигнал, а его подданный, услышав призыв своего монарха, тотчас же посылал ответный сигнал.

Замечание доктора Пункто заставило меня задуматься.

— Все это хорошо, — заявил я, — но нет никого, кто мог бы принять наш сигнал и послать ответный. Может быть, другие светила и обитаемы, но нам пока не удалось установить с ними контакт и научить их сотрудничать с нами на благо науки.

Доктор Пункто рассмеялся.

— Рассчитывать на помощь обитателей других планет особо не приходится, — сказал он, — но мы можем послать световой сигнал, который отразится от другого мира и снова вернется к нам.

— Да, — иронически заметил я, — но не можем же мы для этого установить на далеких мирах зеркала,

которые бы отражали посланные нами световые сигналы.

— Возможно, что для этой цели удастся использовать лучи, испущенные специально разработанным устройством, — принялся размышлять вслух доктор Пункто. — Возьмите, например, радарные лучи. Они отражаются от любого предмета и вполне подходят для нашей цели.

Идея доктора Пункто показалась нам удачной, и мы решили использовать новые лучи для измерения межзвездных расстояний. Несколько недель ушло на установку специальной аппаратуры на космических станциях, но, как только монтаж ее был закончен, мы сразу же приступили к измерениям. Каждое расстояние мы измеряли одновременно и старым, и новым способами, и всегда оказывалось, что оба способа приводят к одному и тому же результату. Для близлежащих объектов старый способ определения расстояний построением треугольника оказывался наиболее точным. Для удаленных объектов к более точным результатам приводили радарные измерения, поскольку базисное расстояние становилось слишком малым. Но и в том, и в другом случае между результатами, полученными по старому и по новому способу, наблюдалось великолепное согласие. Итак, не оставалось никаких сомнений в том, что все небесные тела разбегаются от нас, причем с различными скоростями.

Однако нам не удалось продвинуться ни на шаг по пути к объяснению чудесного явления — разбегания миров. В надежности полученных доктором Пункто результатов сомневаться не приходилось. Следовательно, нам не оставалось ничего другого, как, опираясь на эти результаты, попытаться установить причину загадочного явления.

Я предложил составить список всех известных светил и рядом с каждым из них указать его «особые приметы» (свойства, позволяющие отличать его среди остальных светил) и скорость, с которой оно удаляется от нас.

Небесные светила не обладали каким-нибудь определенным цветом, а отличались множеством оттенков. Одни были красноватыми, другие — желтыми или голубоватыми. Были и светила промежуточных оттенков. Насколько можно было судить, цвет светила никак

не связан со скоростью, с которой оно удаляется от нас.

Среди более удаленных светил известных, естественно, оказалось меньше, чем среди близлежащих, но не всегда светило, видимые размеры которого были больше, располагалось к нам ближе, чем светило с меньшими видимыми размерами. Зная расстояние, на котором находится от нас небесное тело, можно по видимой величине вычислить его истинную величину. В свою таблицу мы заносили истинную величину светил, но установить зависимость между этой характеристикой светил и скоростью, с которой они удаляются от нас, нам также не удалось.

Искомую зависимость мы обнаружили, лишь когда добрались до следующей характеристики небесных тел — расстояния, отделяющего их от нас. Все оказалось предельно просто и ясно: светила, расположенные на большем удалении от нас, двигались с большей скоростью, чем светила, расположенные на меньшем удалении, поэтому нам и казалось, что никакого разбегания не происходит. Скорость разбегания возрастала пропорционально увеличению расстояния от нас до светила. Итак, зависимость мы установили, но как ее объяснить?

Естественно напрашивалось предположение о том, что скорость света по мере удаления от источника падает. Но подобная гипотеза выдержала бы проверку лишь в том случае, если бы мы все расстояния измеряли по времени, которое требуется световому сигналу, чтобы дойти до интересующего нас тела и, отразившись от него, вернуться обратно. Однако измерение расстояний по методу построения треугольников приводило к тем же результатам. Следовательно, разбегание миров нельзя было приписать замедлению скорости света. Причина этого странного явления крылась в чем-то другом, и нам предстояло ее найти.

29. РАСШИРЯЮЩАЯСЯ ЦИРКУЛЬЛАНДИЯ

Несколько дней я бился над проблемой и уже начал сомневаться в том, что мне удастся найти правильное решение. Однако я не утратил бодрости духа. По опыту мне хорошо было известно, что идея, дающая ключ

к правильному решению, может осенить внезапно, в самый неожиданный момент, когда исчезает последняя надежда. Нужно лишь неотступно думать о проблеме, все время — в большей или меньшей степени — заниматься ею и не забывать о ней даже во сне.

Я не знал ни секунды покоя. Но все было напрасно. Причина разбегания далеких миров так и не прояснилась, но я не сдавался. Я не оставлял проблему в покое, и проблема не давала покоя мне. Однажды, вернувшись домой после небольшой прогулки по городу, я застал в гостиной внука, игравшего в солдатики. Он снова расставил их по кругу сравнительно небольшого диаметра. Солдатики расположились по окружности так тесно, что двигаться им было почти некуда. Внуку это мешало, и он расширил окружность, при этом расстояния между солдатиками увеличились.

— Что ты так смотришь, дедушка? — спросил мой внук.

— Размышляю над твоей игрой, малыш, — ответил я. — Почему ты увеличил окружность?

— Чтобы солдатикам было просторнее, — объяснил внук. — Чем больше окружность, тем больше пространство, а значит, и расстояние между солдатиками. Вот и все.

— Нет, не все, — возразил я. — Офицер, должно быть, заметит, что солдаты стали выполнять его приказы не так быстро, как раньше. Ведь теперь требуется больше времени, чтобы любой приказ, отданный офицером, успел дойти до солдат.

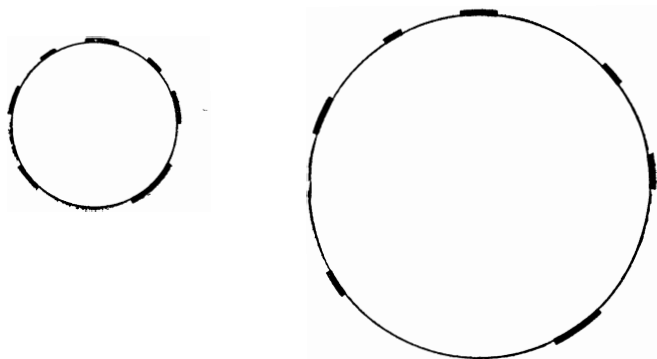
— Конечно, ведь солдаты теперь находятся на большем расстоянии от офицера, — согласился мой внук. — Чем дальше они расположены от офицера, тем больше проходит времени, прежде чем они услышат приказ.

Я стоял и молча смотрел на игрушечных солдатиков, я, старый математик. В ответе моего внука мне почудилось решение занимавшей меня проблемы! По крайней мере одно из возможных решений, а может быть, и единственное ее решение! Расстояния между солдатиками увеличились потому... потому... ах, да!.. потому, что расширилась выстроенная из солдатиков окружность, то есть мир, в котором они обитали. Итак, их мир расширился. Расширился! Расширился?

Не слишком ли необычное направление приняли мои

рассуждения? Может ли расширяться пространство? Может! Окружность, выстроенная из солдатиков, действительно расширилась. А что если способностью расширяться обладает лишь один тип миров — тип миров, имеющих форму окружности? Словно во сне, я прошел в свой кабинет и, утомленный прогулкой и нескончаемыми размышлениями, впал в забытие.

Мне снова привиделась Циркульландия. Передо мной были король и его подданные. Король казался озабоченным. Чем? Это мне было ясно. Он испустил свой



Расширяющаяся Циркульландия. Расстояния между предметами увеличились.

призывный клич. Услышав голос короля, каждый из подданных должен немедленно отозваться. Сначала на призыв откликнутся ближайшие соседи короля, затем те, которые расположены дальше, и так далее. Король сделал все, как подобает властителю Циркульландии, более того, он издал не один, а три вопля, и что же? Ответы пришли с большим запозданием! Мне было понятно, почему так получилось. Я видел, что пространство, в котором обитал король, его владение, его пространство, имеющее форму окружности, расширяется. Расстояния между его подданными увеличиваются, и время, которое требуется звуку, чтобы дойти от короля до любого из подданных и вернуться обратно, с каж-

дым разом возрастает. Король все дольше ждет ответа. Я видел, почему так происходит! Циркульландия расширялась, а король не мог этого понять! Он считал, что подданные пренебрежительно относятся к выполнению его приказов. Король Циркульландии должен был бы понять, что причина задержки ответов кроется в чем-то ином: слишком явная закономерность обнаруживается в запоздании, с которым звук достигает слуха суверена Циркульландии.

Может быть, объяснить ему истинную причину «неповиновения» его подданных? Ох нет! Хватит с меня и прежних бесед с королем Циркульландии. Ведь он ни за что не поверит мне! Разумеется, винить его за это нельзя, поскольку он, будучи существом одномерным, просто не в силах понять меня. Как может подобное существо представить себе расширение окружности, если ему не известно, что такое окружность? Существо, обреченное всю свою жизнь двигаться лишь вдоль кривой, не может постичь, что такое кривизна, ибо восприятие кривизны доступно лишь существам, живущим по крайней мере в двумерном пространстве. Для короля Лайнландии или Циркульландии мои объяснения — слишком ученая материя.

Не знаю, когда я проснулся. Мой сон незаметно перешел в размышления наяву. Трудно сказать, дремал ли я или просто глубоко задумался. Перед моим мысленным взором неотступно стояла Циркульландия, расширяющаяся Циркульландия, а я снова вернулся в мой собственный мир, в мою Флатландию, в Флатландию, искривленную в невидимом мне направлении, в мою Сферландию. Здесь также расстояния увеличивались. А что если...? Вот именно! А что если и...?

30. РАСШИРЯЮЩАЯСЯ СФЕРЛАНДИЯ

Итак, следующий шаг оказался весьма трудным. Трудным или лишь необычным? Впрочем, какая разница, если шаг сделан. В расширяющейся Циркульландии расстояния между предметами увеличивались. В расширяющейся Сферландии расстояния между различными мирами, которые находятся в ней, также должны возрастать. Мне захотелось обсудить эту идею с докто-

ром Пункто. Интересно, что он скажет? Я выбежал из дому, чтобы встретиться со своим другом и сотрудником.

Мы подробно обсудили проблему. Доктор Пункто нашел мою идею весьма интересной, хотя и необычной. Да, идея была необычной, даже весьма необычной, но вся ее необычность обусловлена лишь нашей двумерностью. Расширяющаяся Циркульландия не вызывает у нас удивления, хотя королю Циркульландии, столь почитаемому за мудрость ее обитателями, не под силу представить себе кривизну пространства.

Пункто отправился проводить меня до дома. Мы не говорили более на интересующую нас тему. Обсуждать пока было нечего, нужно было как следует все обдумать.

Погруженные в размышления, мы шествовали рядом, не зная куда. Мы брели наугад, не замечая ничего вокруг. Так мы дошли до газового завода, и тут на глаза нам попало газохранилище, которое как раз в это время наполняли. Наши газохранилища представляют собой упругие оболочки, выполненные в форме окружности. По мере наполнения газом оболочка раздувается. Мне неоднократно приходилось наблюдать, как это делается. В юности нас часто интересуют подобные вещи, хотя на старости лет они кажутся нам скучными. Без особого интереса я взглянул на оболочку и вдруг встрепенулся. На раздувающейся оболочке виднелись какие-то знаки, буквы. Вскоре их можно было различить. Надпись призывала: «Пользуйтесь газом для приготовления пищи». Сначала все буквы стояли вплотную одна к другой, но по мере того как оболочка раздувалась, промежутки между буквами все больше увеличивались.

— Видите вон там, — спросил я доктора Пункто, — расширяется оболочка газохранилища.

— Да, — ответил он, — и промежутки между буквами возрастают.

Значит, и он заметил то же самое.

— Представим себе, что мы следим за какой-нибудь одной буквой, — сказал я. — Расстояния, отделяющие ее от других букв, возрастают. Предположим, что на этой букве находится существо, способное воспринимать другие буквы. Оно заметит, что все буквы удаляются от

него, причем те буквы, которые расположены ближе, удаляются быстрее, а буквы, расположенные дальше, — медленнее.

— Понял! — воскликнул доктор Пункто. — Мы нашли то, что искали! Это и есть решение проблемы! Нечто подобное происходит и в нашей двумерной искривленной Флатландии, в нашей Сферландии. Наше пространство увеличивается, оно расширяется, и поэтому расстояния между всеми мирами увеличиваются, а нам кажется, будто эти миры удаляются от нас.

— Да, причем более далекие миры удаляются с большей, а расположенные ближе — с меньшей скоростью, — добавил я.

— Мы нашли решение, — воскликнул доктор Пункто, не в силах скрыть свою радость, но тотчас же с огорчением добавил: — Но наше решение ни за что не признают ученые.

Увы! Мой друг оказался прав! Когда через несколько дней его вызвали на факультет с отчетом о проделанных измерениях, он, естественно, не мог привести данных, которые были бы «лучше» прежних, и попытался объяснить односторонние изменения расстояний ссылкой на нашу гипотезу о расширяющемся пространстве. Доктора Пункто выслушали с холодным равнодушием. Ученые господа не скрывали, что считают подобные объяснения отговорками, которые доктор Пункто придумал специально для того, чтобы как-то выпутаться из затруднительного положения. Мой друг почувствовал тщетность всех своих попыток объяснить истинное положение вещей и не удивился, когда несколько дней спустя получил официальное уведомление об увольнении. Городские власти не могли более не считаться с мнением высокоученых господ из университета.

Это событие вызвало у нас чувство глубокой досады. Мы понимали, что нашли правильное решение проблемы, но были бессильны: ученый мир не мог его понять. Обсуждая сложившуюся ситуацию дома, я сказал: «Доктор Пункто гораздо умнее всех этих ученых господ из университета», а моя жена добавила: «И мой муж тоже». Столь лестное мнение было слабым утешением, в особенности для доктора Пункто, которому увольнение с поста директора космических обсерваторий нанес-

ло весьма ощутимый удар. Свою вторую отставку он воспринял с покорностью. Мой друг решил, что это судьба, с которой, как известно, особенно не поспоришь.

31. ЧУДЕСА В ТРЕХМЕРИИ

Для холостяка, у которого во всем мире не было никого из близких, дружба с моим семейством была весьма привлекательной, и доктор Пункто сам попросил разрешения провести новогодний вечер в нашем кругу.

Мы собрались в зале, сели в круг, я как глава семьи расположился в центре. Как и во все предыдущие встречи Нового года, мне пришлось рассказать сказку. Я делал это на протяжении многих лет и всегда с неизменным удовольствием. Но тут выяснилось, что все известные сказки я уже рассказал, а новых сказок не было. Впрочем, как сказать! Мне пришло в голову, что я могу рассказать не новую сказку, а старую, лишь облачив ее в новый наряд, предложить вниманию присутствующих новое решение старой проблемы. И я начал рассказывать сказку о спящей красавице.

Мне предстояло поведать о том, что вокруг замка рос лес, ставший за сто лет абсолютно непроходимым, и объяснить, каким образом принц, не будучи Равнобедренным Треугольником с чрезвычайно острым углом при вершине, сумел тем не менее прорубить в этом лесу проход.

Придуманное мной решение этой старой загадки состояло... в расширении нашего пространства. Я рассуждал так: поскольку наше пространство расширилось, то расстояния между деревьями увеличились, а раз деревья расположились дальше друг от друга, то между ними появились просветы. Я сам был в восторге от своей выдумки, и меня очень разочаровало, что моих внуков предложенное мной решение старой загадки (каким образом принцу удалось проникнуть в замок, окруженный непроходимым лесом) не убедило. Они очень любили старый вариант сказки о спящей красавице и не терпели никаких отклонений от него. Я рассказал детям о том, что на расширяющейся окружности расстояния между всеми ее точками увеличиваются. Мой старший внук спросил: «Но ведь мы живем не на окружности?»

после чего мне стало ясно, что он не допускает и мысли о расширяющемся двумерном пространстве. Если не считать доктора Пункто, то всем остальным мой рассказ также показался непонятным. Сказку о спящей красавице поняли лишь двое: сам рассказчик и его гость.

К счастью, всеобщее внимание привлекли поданные окружности на масле. Любимое блюдо создало подлинно предновогоднее настроение.

Когда дети отправились спать, взрослые остались, с нетерпением ожидая новогоднего визита Сферы, и Сфера не заставила себя долго ждать. С двенадцатым ударом часов она появилась в нашем пространстве. После взаимных приветствий завязался разговор на самые жгучие темы, после подробного рассказа о событиях минувшего года я спросил, что думает наша трехмерная гостья о найденном нами решении. К величайшему нашему удовлетворению, оказалось, что полученное нами решение правильно. Сфера поведала нам о том, что наше пространство представляет собой расширяющийся двумерный мир, то есть не окружность, а поверхность сферы все увеличивающегося радиуса.

Сфера, будучи трехмерным существом, могла непосредственно наблюдать расширение между всеми точками на поверхности нашей сферы. Наш гость из трехмерного пространства видел, как «разбегаются» друг от друга города и села на поверхности сферы, причем расстояния между населенными пунктами, расположенными дальше от нее, увеличивались быстрее, чем расстояния между населенными пунктами, расположенными ближе к ней.

Мы были очень довольны, но меня мучил еще один вопрос, который я непременно хотел, но опасался задать Сфере. Мой сын отважился спросить у Сферы о том, на что у меня не хватило духу: не существует ли аналогичного явления в трехмерном мире? К счастью, Сфера не рассердилась, а спокойно объяснила, что трехмерное пространство расширяется так же, как и наша Сферландия. В трехмерном мире существуют свои Вселенные, называемые туманностями, поскольку они находятся на столь больших расстояниях, что еле видны и имеют вид небольших пятнышек. Эти пятнышки удаляются одно от другого, причем так же, как у нас в Сферландии, ско-

рость, с которой движется такое пятнышко, тем больше, чем больше расстояние до него.

Из объяснений нашего гостя мы поняли, что непрерывно расширяться может не только искривленный мир одного измерения — Циркульландия, но и искривленный мир двух измерений — Сферландия и даже мир трех измерений — искривленное Трехмерие. Понять, что трехмерный мир расширяется, Сфере было так же нелегко, как нам осмыслить расширение сферической поверхности, на которой мы живем.

Теперь мы твердо знали, что наш мир непрерывно расширяется, но, кроме нас, об этом не знала ни одна душа во всей Сферландии. Мы были одиноки, совсем одиноки!

32. НЕПОНЯТЫЕ И ОСМЕЯННЫЕ

Мы чувствовали, что совершили открытие необычайной важности. Лишенные тщеславия, мы все же полагали, что наши заслуги непременно должны быть отмечены соплеменниками. Тем не менее доктор Пункто и я сходились на том, что время для этого еще не настало. Мир еще не созрел для восприятия новых идей. Нас не могут понять. Как нередко случается в истории, лишь позднее обитатели Сферландии поймут, что двоим из них — доктору Пункто и мне — удалось намного опередить свое время. Может быть, когда-нибудь нам соорудят памятник — такой же, как моему деду, которого стали почитать лишь много лет спустя после его смерти.

Нам казалось совершенно бессмысленным еще раз идти на поклон к ученым господам из университета и вновь представлять перед широкой публикой в роли безумцев. Настанет время, и все поймут, что мы были правы и наш взгляд на вещи был единственно верным. Кто-нибудь другой заново обнаружит, что расстояния увеличиваются со временем, и примется искать объяснения столь странному явлению. При этом он сначала будет исходить из представления о плоском, не искривленном пространстве и, разумеется, никак не сможет объяснить, почему расстояния между точками все время увеличиваются. Но потом ему просто не останется ничего другого, как прийти к правильному объяснению. Тогда обитатели Сферландии поймут, что наше пространство

искривлено и что это искривленное пространство расширяется.

Сколько времени потребуется, прежде чем новые идеи пробьют себе дорогу, мы не знали. Возможно, что мой внук доживет до того времени, когда его деда, которого при жизни считали безумцем, назовут «Открывателем Расширяющегося Искривленного Пространства». Но возможно и другое: понадобится много поколений, прежде чем обитатели Сферландии созреют для новых идей.

Жизнь продолжалась. Я приказал своей жене не сообщать о моих открытиях миру, который не желал ничего знать о них. В мои намерения отнюдь не входило подготавливать мир к восприятию моих идей. Он сам созреет для них, сам придет к ним. Придет, но позднее! Именно поэтому я изложил все свои открытия в этой книге.

Закончив рукопись, я переплел ее и отдал на хранение в городскую библиотеку. На обложку я наклеил этикетку, на которой написал: «Вскрыть после того, как получит признание теория расширяющегося мира».

До тех пор пока такую надпись будут считать безумной, моя рукопись будет спокойно лежать на полке, но, быть может, настанет время, когда взгляды на структуру пространства изменятся настолько, что библиотekarь, которому попадет в руки моя рукопись, раскроет ее. Я надеялся, что к тому времени ученые будут отличаться большей широтой взглядов, чем нынешние представители физико-математического факультета, и среди них найдутся лица, которые заинтересуются моей рукописью и приведенными в ней данными и посмертно опубликуют мой труд. Это непременно должно случиться.

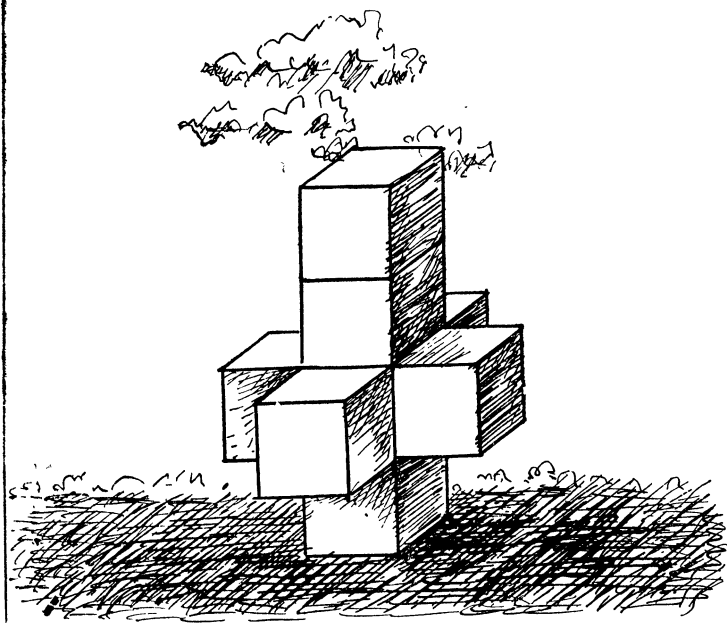
Сферу мы больше не видели. Возможно, что она умерла. Надо думать, что в ночь под Новый год к концу века к нам в Сферландию прибудет официальный посол из Трехмерия. К сожалению, меня к тому времени уже не будет в живых.

Достигнув установленного возраста, я перестал зависеть от благорасположения городских властей. Доктор Пункто, напротив, еще молод, и безделье ему не по вкусу. Он долгое время оставался без работы, но потом ему помогли вновь устроиться. Разумеется, он никогда более не занимал руководящих постов в научных кругах. Ему

не доверяли проведение измерений расстояний в космическом пространстве и не использовали в качестве землемера. Его назначили налоговым инспектором — должность довольно мелкая, но он и ей был чрезвычайно рад. Ведь это была работа, связанная с числами! Особой точности при этом не требовалось, а его причудливые идеи обратили на него внимание начальства и на этом посту.

Друзей у доктора Пункто было мало, и, разумеется, в приличные семьи его не приглашали. Однако у нас он всегда был желанным гостем и неизменно высказывал нам свою признательность за дружеский прием.

**Простое
объяснение
четвертого
измерения**



Генри П. Мэннинг

ЧТО ТАКОЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ?

I

Геометрия, которую мы изучаем в школе, подразделяется на две части: планиметрию, или геометрию двух измерений, и стереометрию, или геометрию трех измерений. Изучение этих геометрий естественно приводит к мысли об обобщении геометрии на случай четырех или большего числа измерений. Например, на плоскости прямая может быть перпендикулярна другой прямой, и положение любой точки можно задавать, указывая, на каком расстоянии она находится от двух взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через некоторую известную точку. В пространстве можно провести три взаимно перпендикулярные прямые, а положение любой точки задавать, указывая, на каком расстоянии она находится от трех взаимно перпендикулярных прямых, проведенных через некоторую известную точку. Таким образом, естественно возникает следующий вопрос: что мешает существованию геометрии, в которой мы могли бы провести четыре взаимно перпендикулярные прямые и положение точки задавать, указывая, на каком расстоянии она находится от четырех взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через некоторую фиксированную точку? Но это еще не все. Площадь прямоугольника можно записать в виде произведения основания на высоту, а фигуры, изучаемые в планиметрии, рассматривать как состоящие из прямых или кривых или считать, что эти фигуры ограничены прямыми или кривыми. Объем прямоугольного параллелепипеда можно записать в виде произведения трех его измерений: длины, ширины и высоты, а фигуры, изучаемые в стереометрии, рассматривать (по крайней мере в большинстве случаев) как состоящие из плоских или кривых поверхностей или

считать, что они ограничены такими поверхностями. Что же мешает нам сделать еще один шаг и рассматривать прямоугольные фигуры четырех измерений, считая их состоящими из плоских или искривленных трехмерных пространств?

Трехмерная геометрия более всеобъемлюща, чем планиметрия, и все же почти любой факт геометрии трех измерений имеет более или менее прямой аналог на плоскости. Геометрия четырех измерений была бы еще более всеобъемлюща, и все же она находилась бы к трехмерной геометрии в таком же отношении, как сама трехмерная геометрия находится к двумерной, что позволяет нам сразу же предсказать многие особенности четырехмерной геометрии.

Наши прогнозы станут понятнее, если сначала мы скажем несколько слов о том, что составляет предмет геометрии и какова природа геометрических рассуждений. Геометрия не рассматривает материальные предметы, например нить или лист бумаги, а интересуется абстрактными линиями или поверхностями. Не рассматривает геометрия и реальные факторы. Она лишь показывает, какие утверждения были бы верными, если верны некоторые другие утверждения. Применяя ту или иную геометрическую теорему к нити или листу бумаги, мы прежде всего должны проверить, выполняются ли условия этой теоремы, и правильность полученного нами результата зависит от того, в какой мере выполнены условия теоремы.

Даже аксиомы геометрии, ранее считавшиеся самоочевидными истинами, ныне рассматриваются лишь как гипотезы. Математик отнюдь не утверждает, что аксиомы верны. Он строит систему утверждений, которые с необходимостью следуют из аксиом и содержатся в самих аксиомах, но оставляет за собой свободу менять аксиомы и, выбирая различные наборы аксиом, строит различные геометрии. Каждая геометрия с математической точки зрения верна, верна в том смысле, что представляет собой совокупность утверждений (теорем), с необходимостью следующих из того набора аксиом, который положен в ее основу. Необходимо, чтобы аксиомы, лежащие в основании геометрии, были непротиворечивыми, то есть чтобы одна аксиома не противоречила другой. Кроме того, аксиомы должны быть независимы-

ми. Утверждение не следует принимать за аксиому, если оно следует из других аксиом. Наконец, система аксиом должна быть полной, то есть геометрия должна полностью определяться принятой системой аксиом без обращения к каким-либо дополнительным аксиомам.

Построив различные геометрии, мы затем останавливаем свой выбор на одной из них и применяем ее к реальности. Мы выбираем такую геометрию, аксиомы и теоремы которой лучше всего соответствуют условиям нашего существования, но этот выбор не является частью математического рассуждения. Он всецело определяется экспериментом и жизненным опытом.

Наконец, математик может пойти еще дальше и отказать от явного определения объектов, рассматриваемых в его геометрии, их свойств и отношений. Математик может выбрать некоторые элементы, назвав их «точками» и «прямыми», и некоторые отношения, которые он называет отношениями «положения», «величины» или «принадлежности». Не определяя в явном виде элементы и отношения, математик предполагает, что элементы удовлетворяют отношениям. Утверждения о том, что выбранные элементы удовлетворяют отношениям, служат аксиомами. Из этих аксиом математик выводит другие отношения. Формулировки этих отношений служат теоремами.

Такова схема абстрактной геометрии. Используемые в ней термины лишены смысла независимо от того, являются ли они такими словами, как «точка», «прямая», «пересечение» и т. д., заимствованными из обычной геометрии, или новыми специально изобретенными словами. Разумеется, гораздо легче придать смысл всем терминам с самого начала и рассматривать геометрию в какой-либо конкретной форме, особенно если этой конкретной форме нетрудно придать наглядный смысл, но вполне возможно строить геометрию абстрактно и лишь затем придавать конкретный смысл ее терминам. Изменяя смысл терминов, мы можем придавать одной и той же геометрии несколько интерпретаций, даже если геометрия первоначально была построена в конкретной форме.

Нарисованная нами картина геометрии позволяет легче воспринимать основные идеи геометрии четырех или большего числа измерений. Подготовленный читатель не встретит трудностей в принятии системы аксиом,

включающей в себя гипотезу о том, что существуют точки, лежащие вне данного пространства трех измерений, коль скоро «точки» и «пространство» — слова, лишенные смысла. Трудность, с которой встретится читатель при попытке наглядно представить себе такую или любую другую геометрию, возникнет лишь тогда, когда он попытается применить ее к нашему или воображаемому миру и при этом выяснится, что применение геометрии приводит к некоторым противоречиям или выходит за пределы накопленного опыта.

Мы уже говорили о том, что одна и та же геометрия может иметь несколько интерпретаций. Так, некоторую двумерную геометрию можно интерпретировать как сферическую геометрию, если под термином «прямая» понимать окружность большого круга. При надлежащем определении длины или расстояния нашу обычную геометрию можно интерпретировать как геометрию, в которой окружности, проходящие через некоторую фиксированную точку, считаются прямыми. Можно было бы привести и другие примеры. Абстрактная геометрия четырех измерений допускает интерпретацию как конкретную геометрию, если под словом «точка» понимать прямую в нашем привычном трехмерном пространстве. Чтобы однозначно определить положение прямой, необходимо задать четыре числа, и все отношения в геометрии четырех измерений можно интерпретировать как отношения между обычными прямыми в трехмерном пространстве и фигурами, образованными из этих прямых.

Но все эти интерпретации кажутся весьма искусственными, и сама абстрактная геометрия представляет интерес главным образом для тех немногих, даже среди математиков, специалистов, которые посвятили себя изучению геометрии. Например, геометрия прямых в трехмерном пространстве представляет интерес и ценность сама по себе, но нас сейчас она будет интересовать главным образом как наиболее естественная интерпретация геометрии четырех измерений, в которой точки означают точки, прямые — прямые линии, а отношения имеют тот же смысл, в котором мы привыкли понимать их в двумерной и трехмерной геометриях, согласующихся с нашим повседневным опытом. Даже если математик использует абстрактную геометрию в какой-

либо другой области математики, он всегда стремится интерпретировать ее наиболее естественным образом.

Самыми важными из геометрий, развитых при помощи различных систем аксиом, являются две геометрии, известные под названием неевклидовых геометрий. Эти геометрии достаточно полно изложены в приводимом ниже очерке «Неевклидова геометрия и четвертое измерение». Ни Лобачевский, ни Бойяи не использовали абстрактный подход к геометрии, намеченной нами выше, тем не менее, как выяснилось, открытая ими гиперболическая геометрия великолепно согласуется с нашим повседневным опытом, если мы ограничимся рассмотрением небольшой части плоскости или небольшой области пространства. То же самое можно сказать и относительно эллиптической геометрии. Мы не можем даже утверждать, что геометрия нашего пространства евклидова и не является ни гиперболической, ни эллиптической. Неевклидовы геометрии в случае двух измерений можно применять к некоторым кривым поверхностям в обычном пространстве (то есть пространстве с евклидовой геометрией), если под термином прямая понимать геодезическую, или кратчайшую, линию. Иногда это утверждение принимают за объяснение неевклидовой геометрии и предполагают, что плоскость в неевклидовой геометрии не является плоскостью, а прямая — прямой.

Так же, как в обычном трехмерном евклидовом пространстве можно найти кривые поверхности, к которым применимы неевклидовы геометрии двух измерений, в четырехмерном пространстве можно указать искривленные трехмерные пространства, или гиперповерхности, к которым применимы трехмерные неевклидовы геометрии. Некоторые склонны усматривать в этом дополнительное объяснение неевклидовых геометрий, ошибочно полагая, будто наше пространство является одним из таких искривленных пространств в пространстве четырех измерений. Некоторые даже считают, что геометрия четырех измерений была специально создана для объяснения неевклидовых геометрий. Сами по себе неевклидовы геометрии не исходят из предположения о том, что пространство искривлено. Неевклидовы геометрии двух и трех измерений не содержат никаких предположений относительно четвертого измерения.

Действительно, мы можем предположить, что четырехмерное пространство, если оно существует, само является неевклидовым (эллиптическим или гиперболическим) и что наше пространство также является трехмерным неевклидовым (эллиптическим или гиперболическим) пространством, причем для этого нам вовсе не потребуется вводить кривизну. Четырехмерная геометрия отнюдь не обязана своим происхождением неевклидовым геометриям. И в том, и в другом случае мы в равной мере имеем дело с отходом от традиций. И четырехмерная, и неевклидовы геометрии выросли из современного анализа общей природы геометрии, но геометрии высшего числа измерений обязаны своим происхождением естественному обобщению двумерной и трехмерной геометрий, и математик находит им многие применения, не уступающие по важности их применению в неевклидовых геометриях.

Понятие многомерных геометрий играет важную роль в математике главным образом из-за параллелизма, существующего между алгеброй и геометрией. Алгебра использовалась до некоторой степени при доказательстве теорем, в которых приходилось рассматривать пропорции и другие отношения между числовыми величинами, но одновременное изучение алгебры и геометрии было впервые систематически проведено в аналитической геометрии и впоследствии стало основой наиболее существенной части математики. Однако алгебра занимается изучением различных величин, одни из них соответствуют планиметрии, другие — стереометрии. Кроме того, в алгебре встречаются величины, которые можно было бы назвать одномерными. Тогда соответствующая им геометрия, как нетрудно понять, интерпретировалась бы как геометрия точек на прямой, хотя такая геометрия вряд ли заслуживала бы внимания, если бы не потребности алгебры.

На первый взгляд может показаться, что такая комбинация алгебры и геометрии служит главным образом целям геометрии, однако в действительности она оказывается необычайно полезной для алгебры. Происходит это двояким путем. Язык геометрии содержит множество удобных терминов для обозначения объектов, описать которые иным способом было бы необычайно трудно. Применяя наглядные представления геометрии

к алгебраическим величинам, мы делаем последние менее абстрактными и более понятными. Такие преимущества мы получаем для изображения алгебраических величин, соответствующих геометриям одного, двух и трех измерений. Однако в алгебре не существует причин, по которым эти величины были бы выделены по сравнению с другими, и, привыкнув оперировать геометрическими терминами в алгебре, мы будем употреблять их применительно ко всем алгебраическим величинам и тем самым используем первое из двух упомянутых выше преимуществ, которые дает нам комбинация алгебры и геометрии.

Но именно из наглядных представлений геометрии математик черпает основную помощь, применяя геометрию к алгебре, а поскольку геометрии высшего числа измерений необходимы для того, чтобы параллелизм между геометрией и алгеброй был полным, то математик пытается воспользоваться наглядными геометрическими представлениями и в этом случае мысленно перенося нас в некое пространство, к которому применимы эти геометрические представления. Сказанное в особенности относится к четырехмерной геометрии, соответствующей некоторым из наиболее важных алгебраических величин.

Итак, мы видим, что геометрия четырех и большего числа измерений важна математику по двум причинам. Представление о такой геометрии как логической системе теорем, выводимых из некоторой совокупности аксиом, важно для изучающего абстрактную геометрию, а представление о пространстве, к которому применимы возникающие геометрии, оказывается чрезвычайно полезным при различных попытках применения геометрии к другим областям математики. Ни один математик не может считать себя полностью «вооруженным», если в его арсенал не входят хотя бы некоторые сведения из геометрии высшего числа измерений.

II

Математики начали интересоваться понятиями n -мерных геометрий примерно в середине прошлого века. Кэли, Грассман, Риман, Клиффорд и некоторые другие математики стали использовать эти понятия в своих

исследованиях. Время от времени другие математики также обращали внимание на различные любопытные факты из многомерной геометрии. Так, первый том *American Journal of Mathematics* открывается статьей профессора Ньюкома, в которой доказано, что сферу, не разрывая, можно вывернуть наизнанку в четырехмерном пространстве, а в третьем томе того же журнала профессор Стрингхэм приводит полный список правильных тел в пространстве четырех измерений, соответствующих правильным многогранникам нашего трехмерного пространства. Появились и другие работы, в которых рассматривалась теория вращения четырехмерных тел, их пересечения и проекции в трехмерное пространство. Великий итальянский геометр Веронезе опубликовал обширный труд по геометрии n измерений с теоремами и подробными доказательствами, совсем как в тех учебниках, по которым изучают геометрию в наших школах. Четвертое измерение является первым из высших измерений, и лишь его мы будем рассматривать далее.

Геометрия четырех измерений важна не только математику, она привлекает и представителей других наук. Так, четырехмерная геометрия затрагивает проблемы пространства, которые относятся к компетенции философа. Попытки представить себе наглядно четвертое измерение заставляют нас напрягать наше пространственное воображение, и тем самым четырехмерная геометрия привлекает к себе внимание психологов. Попытки использовать теории гиперпространства для объяснения физических и других явлений делают четырехмерную геометрию предметом изучения физиков и других естествоиспытателей. Кроме того, широкий интерес вызывают многие любопытные формы и отношения, возникающие при изучении четырехмерной геометрии. Например, трехмерные симметричные тела, отличающиеся лишь расположением в пространстве, можно перевести друг в друга, повернув их в четырехмерном пространстве. Не меньший интерес вызывает плоскость, которая служит осью вращения, а также то обстоятельство, что в четырехмерном пространстве две полные плоскости иногда могут иметь лишь одну общую точку. Гибкую сферу в четырехмерном пространстве можно вывернуть наизнанку, не разрывая ее при этом. Для того чтобы извлечь любой предмет из закрытой коробки или запечатого по-

мещения, в четырехмерном пространстве вовсе не требуется взламывать стенки или проникать сквозь потолок и пол. Узел на веревке в четырехмерном пространстве можно развязать, не прикасаясь к концам веревки, а цепь развязать на отдельные звенья, не распиливая их на части.

Эти любопытные особенности пространства четырех измерений, хотя они и представляют несомненный интерес, чрезвычайно затрудняют изучение четырехмерной геометрии. Мы не только не в силах представить себе, как может происходить нечто подобное, но и сами факты здесь лежат за пределами нашего разумения. Изучая планиметрию и стереометрию, мы рисуем чертежи и строим модели. Мы постоянно видим сами изучаемые предметы, и поэтому, даже если они сложны, нам нетрудно мысленно представить их себе. Иначе обстоит дело с четырехмерной геометрией: она, как правило, занимается изучением таких предметов, которые никогда не встречались нам на опыте и которые мы даже с трудом сможем представить себе. Каждое утверждение четырехмерной геометрии кажется нам лишенным смысла. Особенно часто такое ощущение охватывает тех, кто впервые приступает к изучению четырехмерной геометрии. Легкость в восприятии ее утверждений, если она вообще достигается, приобретает лишь медленно и ценой постоянных упражнений. Однако в четырехмерной геометрии мы, как правило, сталкиваемся с такими вещами, которые ранее нам никогда не приходилось встречать, и поэтому представить их себе нам необычайно трудно. Пытаясь постичь некий предмет, мы, естественно, стремимся сначала представить его себе в общих чертах, ощутить его. Приступая к изучению четырехмерной геометрии, мы можем лишь запомнить различные отношения и ознакомиться с ними. Возможно, что со временем они, по крайней мере отчасти, смогут сравниться по живости восприятия с понятиями трехмерной геометрии. Не следует, однако, возлагать на это слишком большие надежды, чтобы потом нас не постигло разочарование. Наоборот, если мы с самого начала отдадим себе ясный отчет в том, сколь малого следует здесь ожидать, то такой «реалистический» подход к предмету позволит нам достичь больших успехов и в лучшей степени овладеть им.

Отсюда следует, что понять четырехмерную геометрию отнюдь не легко. Изучать ее можно лишь небольшими порциями, возвращаясь к прочитанному и тщательно обдумывая его. Столь трудный предмет полезно рассматривать с различных точек зрения и изучать в различных изложениях. Поэтому приводимые ниже краткие очерки, принадлежащие перу различных авторов, обладают несколькими преимуществами: они содержат известные повторы, написаны с различных точек зрения, невелики по объему, и их можно выбирать и изучать независимо друг от друга.

Все эти очерки либо не математические, либо написаны в популярной форме. Это обстоятельство не следует упускать из виду. Из сравнения геометрии в пространстве низших размерностей мы извлекаем аналогии для геометрии четырех измерений, и эти аналогии настолько полны, что четырехмерную геометрию можно необычайно подробно изложить, не прибегая к строгой манере рассуждений, принятых в математике. Указанные аналогии служат путеводной нитью даже для математиков, но сама четырехмерная геометрия не зависит от этих аналогий. Как система теорем и доказательств, она возникает из положенных в ее основу аксиом в результате процесса логического рассуждения так же, как возникают геометрии пространств низших размерностей. Если мы хотим убедиться в непротиворечивости четырехмерной геометрии, в ее истинности как математической системы, нам необходимо изучить ее математически. Нематематическое изложение следует воспринимать лишь как описание четырехмерной геометрии, и читатель должен ясно сознавать, что подобное описание предназначено отнюдь не для того, чтобы убедить его хотя бы в возможности построения четырехмерной геометрии. Оно преследует иную цель: показать читателю, что такое четырехмерная геометрия.

Существует другой способ, также позволяющий использовать принцип аналогии. Вообразив себе двумерные существа, обитающие на плоскости и неспособные воспринимать третье измерение, а тем более геометрию трехмерного пространства, мы получим яркое представление о том, как мы сами относимся к четырехмерному пространству и тем или иным понятиям многомерной геометрии. Подобный подход становится еще более инте-

ресным, если изложение ведется в форме художественного произведения, повествующего о жизни в двумерном мире. Такое произведение не обязательно должно входить во все детали двумерного существования. Слишком подробное описание жизни в двумерном мире перегрузило бы повествование излишними подробностями, которые отвлекли бы нас от главной цели. Но подобное произведение, написанное так, чтобы искусно ввести нас в некоторые из этих отношений, способно оказать нам огромную помощь в понимании того, как мы сами должны относиться к многомерной геометрии¹.

Геометрия четырех измерений, построенная на основе соответствующей системы аксиом и применяемая обычным способом к точкам, прямым и т. д., представляет собой вполне определенную систему. Однако при попытке облечь наши идеи в физическую форму и представить себе мир либо двух, либо четырех измерений, заполненный двумерной или четырехмерной материей, мы сталкиваемся с явным произволом. Даже для физика материя представляет собой загадку, и мы можем развивать различные теории материи подобно тому, как мы выводим геометрии из различных систем аксиом. Мы не можем утверждать, что до конца постигли все свойства реально существующей материи, поэтому наделение материи в воображаемом пространстве необычными свойствами нельзя считать полностью лишенным смысла. Так, чтобы выяснить, как следует относиться к воображаемому пространству четырех измерений, вполне допустимо предположить, что существует двумерный мир с его обитателями, даже если существование такого мира заведомо исключено. Аналогично мы могли бы предположить, что Луна населена разумными существами,

¹ Такая книга написана Ч. Г. Хинтоном. Называется она «Эпизод из жизни Флатландии». Однако гораздо лучше небольшая книжка Э. Э. Эбботта «Флатландия». В ней основное внимание сосредоточено на тех свойствах пространства, объяснение которых входит в намерения автора, и мы ни на миг не упускаем из виду эти свойства. В книге Хинтона основное внимание уделено личности и судьбе героев, что отвлекает читателя от геометрических особенностей их двумерного мира. Кроме того, окружность, на которой живут персонажи Хинтона, менее реальна, чем мир «Флатландии», хотя, быть может, она и представляет более прямую аналогию с поверхностью Земли в трехмерном пространстве.

и получить весьма живую картину лунной поверхности с точки зрения ее обитателей.

Итак, предположим, что двумерный мир существует. Следующая, не менее интересная задача состоит в том, чтобы понять, как далеко мы можем продвинуться в его описании. Например, можно предположить, что двумерная материя в действительности трехмерна и что двумерные существа также трехмерны. Для этого обитателям плоского мира мы можем приписать небольшую толщину в третьем измерении или по крайней мере снабдить их некой толщиной, которую они сами воспринимать не могут. Но точно так же можно предположить, что обитатели плоского мира двумерны, и проследить, к чему приводит подобное допущение. Любую материальную частицу мы условимся рассматривать как точку, в которой сходятся или от которой исходят притягивающие или отталкивающие силы. Нетрудно предположить, что все эти силы расположены в одной плоскости. Двумерное существо, встретив на своем пути любой объект, сможет распознать, твердый он (точнее, его контур) или мягкий. Световые волны, распространяясь по плоскости, могут отражаться от различных предметов, точнее, от их края, и создавать на сетчатой оболочке глаза двумерных существ изображение. Двумерные волны могут возбуждать особую звуковоспринимающую струну в слуховой полости двумерных существ. Предметы могут удерживаться вместе и прикрепляться друг к другу либо путем прилипания, либо при помощи неких зажимов. Механические устройства и тела живых существ в плоском мире должны были бы иметь сравнительно простую структуру, если там, так же как в нашем мире, изолированные друг от друга предметы практически не взаимодействуют друг с другом. Ни в одном двумерном предмете не могло бы быть сквозных отверстий. Трубы не могли бы существовать в двумерном мире. Если бы в двумерном доме одновременно открылись две двери или распахнулось несколько окон, то такой дом развалился бы на отдельные части. По-видимому, существование в двумерном мире лишь весьма несложных форм и структур отразилось бы на сравнительно низком уровне умственного развития его обитателей, но в приведенной выше воображаемой структуре двумерного мира нет ничего невозможного.

Обратившись к одновременному рассмотрению двумерного и трехмерного пространств, то есть двумерного пространства, вложенного в трехмерное пространство, мы без труда обнаружим, что сами пространства можно выбирать в значительной мере произвольно. Если при том или ином выборе нам встретятся какие-нибудь трудности, то ими можно пренебречь ради наглядности аналогии. Однако вопрос о существовании двумерного мира в трехмерном пространстве интересен и сам по себе, поэтому мы попытаемся рассмотреть его несколько подробнее. Предположим, что двумерная материальная плоскость, населенная нашими двумерными существами, обладает способностью отражать часть света, падающего на нее извне, в силу чего двумерный мир виден трехмерным существам. Рассматривая обитателей плоского мира, трехмерные существа могут без труда заглядывать не только внутрь домов и в закрытые помещения, но и во внутренности двумерных существ. Если трехмерные существа к тому же обладают способностью извлекать предметы из плоскости и возвращать их обратно, то они смогут «похитить» любой предмет из закрытого помещения, сколь бы надежными ни были его замки.

Весьма интересно было бы изучение законов четырехмерной материи, четырехмерной физики, однако мы ограничимся лишь общим описанием различных возникающих здесь форм и возможных видов движения, не вдаваясь в более строгую теорию и не прибегая к точным научным терминам. Наша цель состоит лишь в том, чтобы дать читателю лишь общее представление о четырехмерном пространстве, нарисовать по возможности более точную картину, и мы при описании четырехмерных существ будем накладывать или снимать ограничения, руководствуясь лишь удобством изложения.

Мы различаем формы и положения предметов главным образом с помощью зрения. Органы зрения существа, вынужденного жить в пространстве некоторой вполне определенной размерности, по-видимому, приспособлены к размерности его пространства. Так, картина, образующаяся на сетчатой оболочке нашего глаза, двумерна, поскольку сетчатая оболочка нашего глаза представляет собой двумерную поверхность. У двумерного существа, лишенного способности воспринимать

что-либо вне его плоскости, сетчатая оболочка была бы одномерной или по крайней мере образ предмета из его мира представлялся бы ему в виде линии, причем различные предметы отличались бы по длине, цвету и степени освещенности этих линий. Сетчатая оболочка четырехмерного существа должна была бы быть трехмерной, если предположить, что четырехмерное существо должно различать все лучи света, расположенные внутри данного угла зрения. Действительно, четырехмерное существо может видеть лишь наружную поверхность четырехмерного предмета, а поверхность четырехмерного предмета трехмерна.

Представить себе наглядно, как выглядит четырехмерное тело с его трехмерной границей, нам, разумеется, трудно, поэтому мы можем попытаться получить косвенное представление о форме четырехмерного тела, предположив, что некоторое трехмерное существо — личность, аналогичная нам, обладает способностью проходить сквозь ряд параллельных 3-пространств (трехмерных пространств) и в каждом 3-пространстве рассматривать ту часть четырехмерного тела, которая в нем лежит, то есть сечение четырехмерного тела этим 3-пространством. Аналогичным образом мы могли бы предположить, что некое двумерное существо способно проходить сквозь ряд параллельных плоскостей и в каждой такой плоскости рассматривать сечение интересующего его трехмерного тела. Сечение четырехмерного тела, которое мы могли бы увидеть, имело бы вид трехмерного тела, а его поверхность составляла бы лишь часть трехмерной поверхности четырехмерного тела.

Существует другой, хотя и тесно связанный с только что изложенным способ изучения четырехмерных тел, которым мы также можем воспользоваться. Представим себе, что мы можем переходить из одного 3-пространства в другое, перпендикулярное 3-пространство. Переход этот осуществляется следующим образом. Отбросив одно из трех взаимно перпендикулярных направлений в нашем пространстве, мы присоединим к двум оставшимся четвертое направление, перпендикулярное нашему трехмерному пространству, и получим новое 3-пространство. Сечение четырехмерного тела любым из 3-пространств мы опишем по тому, что мы увидим своими глазами, оказавшись в этом 3-пространстве. Имен-

но это мы и сделаем применительно к различным сечениям четырехмерного тела, получающимся при рассмотрении различных взаимно перпендикулярных 3-пространств во всех точках нашего трехмерного пространства.

Рассмотрим несколько примеров. Первое, с чем нам придется столкнуться при изучении четырехмерной геометрии,— это прямая, перпендикулярная 3-пространству. Так называется прямая, выходящая из произвольной точки нашего пространства в некотором новом, четвертом, направлении, перпендикулярном всем прямым исходного пространства, проходящим через данную точку¹. Если мы станем двигаться вдоль одного из измерений нашего пространства, наблюдая при этом лишь за той его частью, которая лежит в некоторой плоскости, и новым, четвертым, измерением, то мы увидим плоскость и выходящую из нее прямую, перпендикулярную всем прямым, лежащим в данной плоскости, то есть хорошо знакомую нам картину.

В качестве другого примера рассмотрим две абсолютно перпендикулярные плоскости. Если мы выберем плоскость, проходящую через любую точку O , и прямую, перпендикулярную выбранной плоскости и проходящую через точку O , причем и прямая, и плоскость лежат в нашем исходном пространстве, а затем рассмотрим прямую, проходящую через точку O в четвертом направлении, перпендикулярном всем прямым нашего пространства, проходящим через точку O , то получим плоскость, проходящую через точку O , и две прямые, каждая из которых перпендикулярна этой плоскости и другой прямой. Эти две прямые в свою очередь определяют плоскость, в которой каждая прямая, проходящая через точку O , перпендикулярна первой плоскости. Эти две плоскости называются абсолютно перпендикулярными. Рассматривая абсолютно перпендикулярные плоскости из любого 3-пространства, мы могли бы лишь увидеть одну из плоскостей и какую-то одну из прямых,

¹ Точка, вышедшая из центра сферы, расположенной в нашем пространстве, идвигающаяся по прямой, перпендикулярной нашему пространству, не приближается ни к одной части поверхности сферы, а удаляется с одинаковой скоростью от всех ее точек. Именно так можно извлечь предмет из закрытой коробки или запечатого помещения, не проникая при этом сквозь стены и стенки.

лежащих в другой плоскости, а именно прямую, проходящую через точку O перпендикулярно видимой нами плоскости. Другая плоскость пересекает наше пространство вдоль этой прямой. Обе абсолютно перпендикулярные плоскости пересекаются лишь в точке O . Действительно, две плоскости, не лежащие полностью в одном 3-пространстве, не могут иметь более одной общей точки, а когда две плоскости имеют ровно одну общую точку, то самое большее, что мы могли бы увидеть из любого 3-пространства, это одну из плоскостей и одну из прямых, лежащих в другой плоскости.

Если две плоскости абсолютно перпендикулярны третьей в двух точках O и O' , то они лежат в одном и том же 3-пространстве. В этом 3-пространстве мы могли бы наблюдать обе плоскости полностью и лишь одну-единственную прямую, лежащую в третьей плоскости. Эта прямая проходит через точки O и O' , и нам бы казалось, что эта прямая перпендикулярна двум первым плоскостям. С другой стороны, в 3-пространстве, содержащем третью плоскость, мы могли бы рассмотреть ее целиком, но каждая из двух абсолютно перпендикулярных ей плоскостей выродилась бы в прямую.

III

Но продолжим наше знакомство с четырехмерной геометрией.

Если две плоскости абсолютно перпендикулярны в точке O , то любую точку одной из них можно полностью обвести вокруг точки O и другой плоскости, оставаясь при этом все время на одном и том же расстоянии от точки O и другой плоскости. Следовательно, в пространстве четырех измерений мы можем совершить оборот вокруг плоскости так же, как в трехмерном пространстве мы совершаем оборот вокруг прямой. Двумерное существо не может обойти вокруг прямой в своей плоскости, поскольку прямая полностью разделяет плоскость. В трехмерном пространстве мы не можем обойти вокруг плоскости, ибо плоскость полностью разделяет наше пространство. Но в пространстве четырех измерений плоскости, хотя она и обладает двумя измерениями, недостает двух измерений, и поэтому мы можем обойти вокруг плоскости, оставаясь все время на

заданном расстоянии от любой выбранной на ней точки. Если мы отбросим одно из двух измерений плоскости, превратив ее тем самым из плоскости в прямую, и перейдем в 3-пространство, содержащее абсолютно перпендикулярную плоскость, то мы сможем наблюдать за вращением одной плоскости вокруг другой: нам будет казаться, что исходная плоскость поворачивается вокруг некоторой прямой.

Плоскость может вращаться по самой себе вокруг одной из своих точек. Если две плоскости абсолютно перпендикулярны в точке O , то любая из них, вращаясь по самой себе вокруг точки O , остается абсолютно перпендикулярной другой плоскости. В этом случае можно сказать, что подвижная плоскость вращается вокруг фиксированной плоскости как вокруг оси, а саму фиксированную плоскость назвать осевой плоскостью. В каждой точке фиксированной плоскости можно построить абсолютно перпендикулярную плоскость. Все абсолютно перпендикулярные плоскости могут вращаться вокруг одной и той же исходной фиксированной плоскости. То же происходит и в нашем трехмерном пространстве, если мы выберем фиксированную прямую и в каждой ее точке построим перпендикулярную ей плоскость. Мы можем считать, что тела в нашем пространстве или в части пространства вращаются вокруг фиксированной оси. Аналогично можно считать, что тела в четырехмерном пространстве или в части этого пространства вращаются вокруг фиксированной плоскости как вокруг осевой плоскости. При таком вращении части тела не претерпевают деформации. Они сохраняют свою форму неизменной, и поэтому отпадает необходимость предполагать, что они упруги.

Если небольшие деформации считать допустимыми, то в качестве оси вращения можно выбрать кривую поверхность. Назовем материальной поверхностью тело, которое имеет значительную протяженность в двух измерениях и очень малые размеры в двух других измерениях. Пользуясь трехмерной аналогией, мы можем сказать, что кусок ткани имеет значительную протяженность в двух измерениях и очень малые размеры в третьем. Нить имеет существенные размеры лишь в одном измерении, а ее размеры в двух других измерениях очень малы. Если материальная поверхность обладает

гибкостью, то ее можно перекрутить так, чтобы две противоположные стороны материальной поверхности поменялись местами. Материальная поверхность, подобно куску ткани, имеющему небольшую толщину в направлении четвертого измерения, ограничена поверхностями со всех сторон.

Можно сказать, что поворот гибкой материальной поверхности на 180° переводит две стороны, первоначально находившиеся в нашем пространстве, снова в наше пространство, но при этом меняет их местами: каждая сторона после поворота занимает то место, которое первоначально занимала другая. Различные части материальной поверхности при таком повороте не взаимодействуют между собой, поэтому поворачивать можно любую материальную поверхность, независимо от того, является ли она открытой частью некоторой большей материальной поверхности или замкнута, наподобие полового резинового шара. В нашем пространстве резиновую ленту, изгибая, можно вывернуть наизнанку. Это в точности соответствует выворачиванию сферы в пространстве четырех измерений.

Симметричные фигуры в четырехмерном пространстве лучше всего рассматривать, изучая в отдельности симметрию относительно точки, прямой или плоскости.

Фигуры на плоскости, симметричные относительно точки, равны, ибо каждую из них поворотом вокруг точки — центра симметрии — можно совместить с другой фигурой. Однако фигуры на плоскости, симметричные относительно прямой, нельзя совместить, не выводя из плоскости, не поворачивая в пространстве. Двумерные существа могли бы рассматривать такие фигуры как истинно симметричные, ибо их соответственные части равны, но расположены в обратном порядке, что мешает их полному совпадению.

Рассмотрим симметрию в трехмерном пространстве. Фигуры, симметричные относительно прямой, можно привести в совпадение, поворачивая одну из них вокруг оси симметрии. С другой стороны, фигуры, симметричные относительно точки и плоскости, если только они не являются плоскими фигурами, следует считать истинно симметричными, ибо никаким движением в пространстве совместить их невозможно. Фигуры, симметричные относительно плоскости, можно превратить в фигуры, сим-

метричные относительно точки, а фигуры, симметричные относительно точки,— в фигуры, симметричные относительно плоскости. Предположим, например, что две фигуры симметричны относительно плоскости. Соединим их жестким стержнем, перпендикулярным плоскости симметрии, а пары соответствующих точек свяжем прямыми, например упругими нитями. Если мы повернем одну из фигур на пол-оборота вокруг стержня как вокруг оси, то упругие нити скрестятся в точке, где ось вращения — стержень пересекает исходную плоскость симметрии; относительно этой точки фигуры станут симметричными.

В четырехмерном пространстве фигуры могут быть симметричными относительно точки, прямой, плоскости или 3-пространства. Фигуры, симметричные относительно точки, можно превратить в фигуры, симметричные относительно плоскости, и наоборот, а фигуры, симметричные относительно прямой,— в фигуры, симметричные относительно 3-пространства, и наоборот. Фигуры, симметричные относительно 3-пространства, являются истинно симметричными, и их нельзя совместить никаким движением в четырехмерном пространстве. Можно сказать, что части истинно симметричных фигур расположены в обратном порядке. Но фигуры, симметричные относительно плоскости, можно совместить, повернув одну из них вокруг плоскости, как вокруг плоскости симметрии, на 180° , независимо от того, являются ли рассматриваемые фигуры четырехмерными или трехмерными. Таким образом, для четырехмерных существ то, что мы называем симметричными фигурами, отличается лишь положением в пространстве.

Это весьма удивительный факт. Правая перчатка, повернутая в пространстве четырех измерений, становится левой перчаткой, а правый ботинок превращается в левый. Человек, привыкший работать правой рукой, после того, как его повернут в четырехмерном пространстве, превратится в левшу. Все операции он будет по-прежнему производить той же рукой, что и до поворота в четырехмерном пространстве, но всем окружающим будет казаться, что он работает левой рукой. При повороте точка зрения человека «изменилась на противоположную», поэтому ему кажется, что изменилось все окружающее. Обычные буквы представляются ему

зеркальными, как шрифт наборщику, стрелки часов идут в противоположном направлении, а весь мир превращается в свое зеркальное отражение.

Между поворотом предмета в четырехмерном пространстве и выворачиванием его наизнанку существует различие, которое не всегда понимают. Правая перчатка, вывернутая наизнанку в трехмерном пространстве, превращается в левую перчатку. Правая перчатка, повернутая в пространстве четырех измерений, также становится левой перчаткой, но, когда перчатку поворачивают в четырехмерном пространстве, она не выворачивается наизнанку. С другой стороны, правую перчатку можно вывернуть наизнанку в четырехмерном пространстве так же, как и замкнутую резиновую оболочку — мяч. Как происходит такое выворачивание, мы рассказали в предыдущем разделе. При выворачивании в четырехмерном пространстве пальцы перчатки не нужно продевать сквозь отверстие, через которое мы всовываем в перчатку руку, каждая часть перчатки поворачивается на своем месте. При таком выворачивании в четырехмерном пространстве перчатка, быть может, слегка натянется, а отдельные ее части чуть изменят свое положение. Однако при выворачивании в четырехмерном пространстве правая перчатка не станет левой, а по-прежнему останется правой перчаткой. Аналогию с выворачиванием в четырехмерном пространстве можно усмотреть на плоскости, если взять почти замкнутую фигуру. Распрямив ее в отрезок прямой, мы можем превратить фигуру в симметричную ей: для этого лишь требуется изогнуть ее в другую сторону, то есть вывернуть наизнанку. Весь процесс выворачивания происходит при этом в плоскости и доступен двумерному существу. Однако ту же фигуру можно превратить в симметричную ей и путем поворота в трехмерном пространстве, но при этом она не выворачивается наизнанку. С другой стороны, если наша плоская фигура обладает достаточной гибкостью, то ее можно вывернуть наизнанку, перекрутив каждую часть на 180° , при этом она не перейдет в симметричную фигуру.

Гипертело, то есть часть четырехмерного пространства, можно разделить на две части 3-пространством. Таким образом, сечение, разрезающее гипертело на две части, окажется трехмерным. Плоскостью невозможно

разделить гипертело на две части, так же как прямой нельзя разделить на две части тело в трехмерном пространстве. Прямая может проходить через тело в трехмерном пространстве, прорезая в нем дырочку. Прямая может проходить и сквозь гипертело, также прорезая в нем мельчайшее отверстие. Стержень, или материальная прямая, имеющий значительную протяженность вдоль одного главного измерения и очень маленькие размеры по трем остальным измерениям, пронзит гипертело, образовав в нем отверстие. Но гипертело можно пронзить и плоской пластинкой, имеющей сравнительно большую протяженность по двум измерениям и очень маленькую протяженность по двум другим. Пластина, прорезающая гипертело, могла бы иметь бесконечную протяженность по двум главным направлениям, но гипертело при этом не распалось бы на части. Таким образом, отверстия в пространстве четырех измерений бывают двух типов: одномерные и двумерные.

Одномерное отверстие может проходить сквозь четырехмерное тело в направлении, перпендикулярном нашему трехмерному пространству, и тогда четырехмерное тело покажется нам полностью замкнутым, но полым, наподобие полой сферической оболочки. Сквозь такое отверстие может проходить стержень или нить, которые будут удерживаться в нем жестко, но стержень или нить, проходящие сквозь двумерное отверстие, будут сразу же выскальзывать, если мы потянем их за конец. Стержень, изогнутый так, что концы его можно соединить и приварить один к другому, превращается в кольцо. Отверстие этого кольца двумерно. Сцепить два кольца невозможно, но в четырехмерном пространстве мы легко можем сцепить кольцо и полу сферу. Более того, чередуя кольца и полые сферы, можно построить целую цепочку. В обычном узле один из концов веревки проходит сквозь кольцо, образованное самой веревкой, и тотчас же скрывается в четвертом измерении¹.

¹ Некоторые авторы предпочитают говорить о петле или о «двумерном узле», имея в виду наш обычный узел, завязанный на веревке в трехмерном пространстве. Против такого словоупотребления можно возразить, что петля не двумерна, ибо, сколь бы плотно одна часть веревки ни прилегала к другой, все же она проходит над ней. Более точную аналогию мы получим, привязав один конец веревки к какому-нибудь небольшому предмету и обмотав ее затем

Колесо из четырехмерной материи в двух измерениях имеет форму окружности, а его размеры в двух остальных измерениях очень малы. Осью такого колеса служит не стержень, а плоская пластина. Во всех направлениях, лежащих в ее плоскости¹, осевая пластина может простирается до бесконечности, не мешая колесу свободно вращаться. Колесо можно снять с осевой пластины, если только оно не закреплено на ней, так же, как трехмерное колесо свободно снимается со своей оси. Находясь в 3-пространстве, мы увидим осевую пластину и два противоположных радиуса (две спицы) четырехмерного колеса, причем спицы будут казаться нам не связанными между собой. Так мы можем увидеть двумерное отверстие, а также все колесо с отверстием и осевым стержнем, высекаемым из осевой пластины нашим 3-пространством.

Мы можем жестко скрепить колесо с осевой пластиной так, что она будет поворачиваться вместе с колесом, при этом четырехмерное колесо будет вращаться в своей плоскости, а осевая пластина поворачиваться по самой себе. На одну осевую пластину можно насадить несколько колес, расположив различные колеса в различных точках пластины. Если эти колеса жестко скреплены с осевой пластиной, то, повернув одно из них, мы можем повернуть все остальные. Так мы получаем возможность строить различные механизмы в пространстве четырех измерений.

Ничто не мешает нам выбрать в качестве осевой пластины колесо. Оба колеса — основное и ось — можно скрепить в их центрах так, чтобы они были абсолютно перпендикулярны. Такая фигура может вращаться двумя способами: плоскость каждого из четырехмерных колес служит осевой плоскостью вращения другого, а плоскость другого колеса — плоскостью вращения.

вокруг этого предмета. На плоскости нам удалось бы обмотать веревку вокруг предмета лишь в том случае, если бы мы стали обводить вокруг него свободный конец, описывая полные круги. В трехмерном пространстве достаточно приподнять над обматываемым предметом лишь часть веревки, а ее свободный конец может оставаться на месте.

¹ Иногда, не стремясь к особой точности, мы будем говорить о плоскости колеса или о плоскости пластинки так же, как мы говорим о плоскости колеса и пластинки в трехмерном мире.

Четырехмерное колесо может быть дважды круговым. В этом случае плоскость, абсолютно перпендикулярная колесу, пересекает его по малой окружности, а плоскость, совпадающая с плоскостью самого колеса, пересекает колесо по большой окружности. Дважды круговое колесо может вращаться двумя различными способами и в каждом из двух случаев совершать полные обороты, не проходя через новые части четырехмерного пространства.

Рассмотрим сферическое четырехмерное колесо. Это тело, имеющее вид сферы в трех измерениях и очень небольшой размер в четвертом измерении. Такое колесо с одномерным отверстием, сквозь которое можно пропустить осевой стержень, будет вращаться, но его движение не ограничивается определенным направлением вращения, как это происходит с плоским колесом, вращающимся в одной плоскости. Для механизма, требующего определенное направление вращения, мы будем пользоваться плоскими колесами с осевыми пластинками¹. Сферическое колесо можно использовать для четырехмерных экипажей. Если четырехмерные существа живут на четырехмерной Земле, то есть на ее трехмерной границе, то экипаж с четырьмя колесами любого рода или с большим числом колес оказался бы незаменимым при путешествиях. Экипаж с плоскими колесами мог бы передвигаться лишь по прямой без трения между колесом и поверхностью земли. Экипаж со сферическими колесами мог бы передвигаться по плоскости в любом направлении без трения, которое возникало бы лишь при переходе из одной плоскости в другую.

Для устойчивости экипаж должен был бы обладать по крайней мере четырьмя колесами, а последние должны были бы иметь по крайней мере две оси. Даже если экипаж имел бы плоские колеса и осевые пластины, нам понадобились бы по крайней мере две такие пластины. Для того чтобы находиться в равновесии, не-

¹ Хинтон говорит о «четырёхмерном вале» (диске, вращающемся вокруг своей центральной плоскости) и о сферическом колесе, которое он называет «четырёхмерным колесом». У читателя может создаться впечатление, что осью колеса служит диск, в то время как ось колеса одномерна. Четырёхмерные существа должны пользоваться не такими колесами.

обходимо иметь четыре точки опоры, причем все они не должны быть расположены в одной плоскости.

Трудно представить себе, каким образом границы гипертел, то есть конечных частей четырехмерного пространства, могут быть трехмерными. Ясно, что этого требует аналогия, но понять, каким образом каждая точка, лежащая внутри трехмерного тела, может разделять две части, на которые рассекает четырехмерное пространство это трехмерное тело, довольно трудно. Находясь в любой точке внутри трехмерной границы гипертела, мы можем выйти из нее по трем взаимно перпендикулярным направлениям, оставаясь при этом внутри границы. Столько же взаимно перпендикулярных направлений мы насчитываем в нашем трехмерном пространстве. Нам придется идти по кривой траектории, если граница гипертела искривлена, но в начале пути мы можем выйти из точки по трем взаимно перпендикулярным направлениям точно так же, как в нашем трехмерном пространстве.

Гипертело, ограниченное многогранниками, можно вскрыть и разложить многогранники в одном 3-пространстве. Обращая этот процесс, мы можем образовать границу гипертела, составляя ее из надлежащим образом подобранных трехмерных тел в 3-пространстве и поворачивая их затем вокруг общих граней так, чтобы в конце концов они образовали границу гипертела. Трехмерные тела при этом не деформируются и не распадаются. Так, если мы возьмем куб, разместим на его гранях шесть других равных ему кубов и поместим еще один куб поверх одного из шести кубов, то такую конструкцию можно повернуть так, чтобы она образовала гиперкуб, или тессеракт, который упоминается в некоторых из приводимых ниже очерков. Такое построение гипертел аналогично построению многогранников из плоских разверток. Аналогия очень ясная, настолько, что мы можем не сомневаться в итоге нашего построения, хотя оно и приводит к удивительным результатам.

Упомянем здесь некоторые из наиболее простых фигур четырехмерной геометрии, аналогичные фигурам, изучаемым нашей стереометрией.

Первые фигуры, о которых следовало бы упомянуть,— это гиперпризма и гиперцилиндр с параллельными линейными элементами, а также гиперпирамида

и гиперконус с линейными элементами, пересекающимися в вершине. Основаниями всех этих гипертел служат многогранники или некие другие трехмерные тела, а их линейные элементы исходят из трехмерного пространства, в котором лежит основание. Гиперкуб является частным случаем гиперпризмы.

Простейший случай гиперпирамиды — фигура, называемая пентагедроидом. В основании ее лежит тетраэдр, или треугольная пирамида. Таким образом, пентагедроид имеет всего пять вершин. Любые пять точек, не лежащие в одном 3-пространстве, можно считать вершинами некоторого пентагедроида. Если из этих пяти точек мы будем всеми возможными способами выбирать по четыре, то получим пять тетраэдров. Следовательно, пентагедроид можно получить как гиперпирамиду пятью различными способами. Тетраэдры расположены так, что имеют попарно общие грани, каждый тетраэдр имеет одну общую грань с каждым из остальных. Эти тетраэдры можно разрезать так, чтобы они образовали трехмерную развертку пентагедроида, то есть чтобы их можно было развернуть в одном 3-пространстве. Трехмерная развертка пентагедроида имеет вид тетраэдра, на каждой из граней которого построено еще по одному тетраэдру. Пентагедроид образуется, когда эти тетраэдры определенным образом поворачиваются. При таком повороте ни один из тетраэдров не искажается и не отделяется от другого. Сложенные вместе, пять тетраэдров образуют одну замкнутую фигуру, заключающую внутри себя конечную часть гиперпространства. Процесс получения гипертела из его трехмерной развертки аналогичен процессу получения трехмерного тетраэдра из его плоской развертки.

В общем случае граница гиперпирамиды состоит из многогранника, лежащего в основании, и боковых пирамид, покоящихся на гранях основания. Боковые пирамиды примыкают друг к другу общими гранями так же, как грани многогранника, лежащего в основании, примыкают друг к другу общими ребрами.

Гиперпирамиду, в основании которой лежит пирамида, можно рассматривать как гиперпирамиду двумя способами. В каждом из двух случаев вершиной гиперпирамиды служит одна из вершин трехмерной пирамиды, лежащей в основании гиперпирамиды при ином способе

рассмотрения. Трехмерные пирамиды, служащие основаниями, имеют общее основание — многоугольник. Таким образом, гиперпирамида определяется многоугольником и двумя точками, не лежащими в одном 3-пространстве с этим многоугольником. Прямую, проходящую через две указанные точки, можно было бы назвать вершинной прямой. Граница гиперсферы состоит из двух пирамид и части, порождаемой треугольником, размеры и форма которого могут изменяться, но одна сторона остается неизменной, а противоположная ей вершина пробегает все точки некоторого многоугольника, не лежащего в одном 3-пространстве с фиксированной стороной. Производящий треугольник иногда называют треугольным элементом.

Аналогично гиперконус, основанием которого служит конус, можно рассматривать двумя различными способами. Его границей служат два конуса и некоторая часть, порожденная треугольником с одной фиксированной стороной. Вершина треугольника, противоположная фиксированной стороне, пробегает плоскую кривую, не лежащую в одном 3-пространстве с фиксированной стороной.

Граница гиперпризмы состоит из двух многогранников, служащих основаниями, и боковых призм. Основаниями боковых призм служат грани многогранников, лежащих в основании гиперпризмы. Боковые призмы примыкают друг к другу вдоль общих боковых граней.

Если основаниями гиперпризмы служат призмы, то ее боковая граница состоит из двух призм и набора параллелепипедов. Такую фигуру можно рассматривать как гиперпризму двумя способами. Две призмы, которые в одном случае являются боковыми, в другом служат основаниями. Все четыре призмы последовательно соединены друг с другом основаниями. Каждый из параллелепипедов двумя противоположными гранями примыкает к двум соседним параллелепипедам, а остальные его четыре грани примыкают к боковым граням каждой из четырех призм. Если четыре призмы отсечь от параллелепипедов и провести разрез вдоль одного из общих оснований, то их можно развернуть в одном 3-пространстве. Если к тому же призмы были прямыми, то мы получим одну прямую призму. Параллелепипеды можно разъединить, проводя разрез вдоль одной из об-

щих граней и так же развернуть их в одном 3-пространстве, при этом, если параллелепипеды были прямоугольными, мы получим одну прямую призму (параллелепипед). Взяв одну из больших призм, мы сможем приставить ее под углом к другой большой призме так, чтобы их общие грани совместились. Затем одну из призм можно будет обкатывать по другой призме, при этом все соответственные грани будут совмещаться. В исходной фигуре обе призмы были свернуты вокруг друг друга так, что каждая точка боковой поверхности одной из призм приходилась на соответствующую точку, принадлежащую боковой поверхности другой призмы, и обе призмы вместе замыкали внутри себя конечную часть четырехмерного пространства.

Если мы выберем из четырех призм четыре элемента, образующие параллелограмм, то все параллелепипеды мы получим, двигая этот параллелограмм параллельно самому себе. При этом вершины его будут описывать основания призм. Набор из четырех призм можно также получить, передвигая параллельно самим себе многоугольные основания. При этом вершины оснований будут описывать параллелограммы, вдоль которых параллелепипеды примыкают друг к другу. Таким образом, параллелограмм и многоугольник играют роль производящих элементов, причем каждый служит для другого направляющей при получении соответствующей части гиперпризмы.

Аналогичным образом можно построить гиперцилиндр с двумя цилиндрическими основаниями. Часть боковой поверхности гиперцилиндра состоит из двух цилиндров, соединяющих концы цилиндрических оснований, поэтому всю фигуру можно рассматривать как гиперцилиндр двумя способами. Из четырех цилиндров можно выбрать четыре элемента, образующие параллелограмм, а остальную часть боковой границы можно построить, двигая этот параллелограмм параллельно самому себе. При этом его вершины будут описывать основания цилиндров. Поскольку цилиндры можно получить аналогичным способом, двигая плоскую кривую параллельно самой себе вокруг любого из параллелограммов, то параллелограмм и замкнутая плоская кривая позволяют получить весь гиперцилиндр. При построении одной его части параллелограмм служит производящим

элементом, а замкнутая плоская кривая — направляющей, при получении другой части роли элементов меняются.

Таким образом, гиперпризму, основаниями которой служат призмы, и гиперцилиндр с цилиндрическими основаниями можно рассматривать как частные случаи некоторого класса гипертел, допускающего следующие описания. Расположим два многоугольника, две замкнутые плоские кривые или многоугольник и плоскую кривую так, чтобы они пересекались, но не лежали в одном 3-пространстве. Их плоскости будут пересекаться лишь в той точке, где пересекаются сами кривые. Один многоугольник или одну кривую начнем двигать параллельно себе вокруг другой. При этом мы получим трехмерную фигуру в форме кольца (причем не только наружную поверхность, но и все внутренние точки фигуры). Двигая другой многоугольник или кривую вокруг первого, мы точно таким же образом получим вторую фигуру в форме кольца. Эти две кольцеобразные фигуры плотно примыкают друг к другу и образуют границу гипертела, внутри которой заключена конечная часть четырехмерного пространства. Такое гипертело можно назвать двойной призмой, призмочилиндром или двойным цилиндром в зависимости от того, что мы выбрали вначале: два многоугольника, многоугольник и кривую или две кривые. Если плоскости двух производящих многоугольников абсолютно перпендикулярны, то мы получим прямую двойную призму. Аналогично можно получить и прямые фигуры остальных двух типов.

Если любую часть границы отделить от остальной и провести разрез вдоль одного из производящих элементов, то оставшаяся часть границы развернется в одном 3-пространстве, аналогичном нашему трехмерному пространству. Если плоскости двух производящих элементов абсолютно перпендикулярны, то каждая часть границы при развертывании в 3-пространстве превращается в прямую призму или в прямой цилиндр. В этом случае исходные фигуры можно описать иначе. Например, для того чтобы построить прямую двойную призму, достаточно взять две прямые призмы, выбрав их так, чтобы высота каждой из них совпадала с периметром другой призмы. Перегнув их относительно друг друга,

мы можем совместить все соответствующие грани и получить трехмерное тело, внутри которого будет заключена конечная часть четырехмерного пространства. Аналогично можно построить прямой призмцилиндр или прямой двойной цилиндр, взяв в одном случае призму и цилиндр, а в другом два цилиндра.

Если при построении двойного цилиндра мы возьмем два круговых цилиндра, то получившееся гипертело можно назвать цилиндром двойного вращения. Такой цилиндр будет вращаться двумя независимыми способами вокруг двух абсолютно перпендикулярных плоскостей. Плоскости вращения образованы осями двух цилиндров. Каждое из вращений происходит следующим образом. Одна из осей вращается по самой себе, а другая, совпадающая с осевой плоскостью, остается неподвижной.

Если один из цилиндров имеет очень маленький радиус по сравнению с радиусом другого цилиндра, в силу чего у второго цилиндра очень маленькая высота (один цилиндр напоминает веревку, а другой — колесо¹), то получающееся при этом гипертело можно назвать дважды круговым колесом.

Изучая четырехмерное пространство, мы непременно встретимся с еще одной фигурой, а именно с гиперсферой, геометрическим местом точек, равноудаленных от некоторой данной точки. Иногда гиперсферой называют гипертело, то есть конечную часть гиперпространства, заключенную внутри этого геометрического места, а само геометрическое место называют границей, или гиперповерхностью, гиперсферы. При таком понимании гиперсфера (то есть граница) трехмерна, и на ней реализуется трехмерная эллиптическая неевклидова геометрия. Впрочем, это не удивительно, поскольку обычную сферическую геометрию можно рассматривать как двумерную эллиптическую неевклидову геометрию.

¹ Мы имеем в виду трехмерную веревку — такую, которую мы привыкли видеть в нашем пространстве. Все упоминавшиеся выше призмы и цилиндры трехмерные. Из них мы строим границу четырехмерных гипертел. С другой стороны, осевые пластинки и стержни, а также плоские и сферические колеса, о которых мы говорили на стр. 307, четырехмерные. Они обладают ненулевой толщиной по всем четырем измерениям.

Сформулируем некоторые правила, позволяющие вычислять размеры гипертел в геометрии четырех измерений. Известны правила, позволяющие вычислять объем границы гипертел или части этой границы, а также гиперобъем, то есть величину части 4-пространства, заключенной внутри границы. В большинстве случаев эти правила выводятся так же, как соответствующие правила для площади и объема в обычной геометрии, или могут быть получены методами математического анализа. Все приводимые ниже правила применимы к правильным фигурам, и большинство из них допускает обобщение на некоторые другие классы фигур, но мы не будем здесь останавливаться на этом.

Гиперпризма и гиперцилиндр.

Боковой объем = площадь поверхности основания, умноженная на высоту.

Гиперобъем = объем основания, умноженный на высоту.

Гиперпирамида и гиперконус.

Боковой объем = площадь поверхности основания, умноженная на $\frac{1}{3}$ высоты.

Гиперобъем = объем основания, умноженный на $\frac{1}{4}$ высоты.

Двойная призма, призмцилиндр и двойной цилиндр.

Объем одной части границы = площадь, заключенная внутри производящего многоугольника или кривой, умноженная на периметр направляющей.

Полный объем границы равен сумме двух таких произведений. Можно сказать, что полный объем равен сумме двух произведений, каждое из которых образовано при умножении площади, заключенной внутри производящего многоугольника или кривой, на периметр другого многоугольника или кривой.

Гиперобъем = произведение площадей, заключенных внутри производящих многоугольников или кривых.

Для цилиндра двойного вращения с радиусами R и R' справедливы следующие формулы:

$$\text{Объем} = 2\pi^2 R R' (R + R').$$

$$\text{Гиперобъем} = \pi R^2 R'^2.$$

Гиперсфера.

$$\text{Объем (границы)} = 2\pi^2 R^3.$$

$$\text{Гиперобъем (заключенный внутри границы)} = \frac{1}{2}\pi^2 R^4.$$

Если радиусы цилиндра двойного вращения равны радиусу гиперсферы, то его можно описать вокруг этой гиперсферы. При этом объем цилиндра двойного вращения будет равен удвоенному объему гиперсферы, а гиперобъем — удвоенному объему гиперсферы.

Грэхэм Д. Фитч

ПОПУЛЯРНОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Представить себе наглядно четвертое измерение невозможно. Тем не менее четвертое измерение — не абсурд, а полезное математическое понятие, лежащее в основе развитой непротиворечивой геометрии. Чтобы получить хотя бы частичное представление о том, что такое четвертое измерение, и хотя бы в общих чертах представить себе его, необходимо воспользоваться аналогией с пространством меньшего числа измерений.

Мы говорим, что множество одно-, двух- или трехмерно в зависимости от того, сколько чисел (одно, два или три) необходимо задать для того, чтобы полностью определить любой из элементов этого множества. Если пространство рассматривать как множество точек, то прямую можно назвать одномерным пространством, потому что положение точки на прямой полностью определяется заданием одного числа: расстояния от некоторой фиксированной до рассматриваемой точки. Аналогично плоскость является двумерным пространством, а множество точек, образующих пространство, в котором мы живем, трехмерно. Действительно, точное положение любой точки на Земле известно, коль скоро заданы ее широта, долгота и высота над уровнем моря. Если мы обратимся к четырем переменным, каждая из которых может принимать независимо от других численные значения, то получим четырехмерное множество. Такое

множество, если оно состоит из точек, образует четырехмерное пространство.

Если все точки нашего пространства (3-пространства) соединить с некоторой воображаемой точкой вне его, то множество точек, лежащих на проведенных прямых, образует 4-пространство (гиперпространство). Точка, двигаясь, порождает линию. Линия, двигаясь в поперечном направлении, порождает поверхность. Поверхность, двигаясь в сторону от себя, порождает объемное тело. Тело, двигаясь из нашего пространства, порождает гипертело, или конечную часть гиперпространства. Допустимо рассуждать и несколько иначе. Можно считать, что гиперпространство порождается всем нашим пространством, когда последнее движется параллельно самому себе в некотором не содержащемся в нем направлении. Наше пространство в свою очередь можно считать порожденным аналогичным движением неограниченной плоскости, а плоскость — порожденной движением неограниченной прямой. Любое пространство можно рассматривать как границу между двумя частями пространства более высокой размерности. Любая неограниченная плоскость разделяет наше пространство на две равные бесконечные части. Точно так же каждое 3-пространство разделяет гиперпространство на две равные бесконечные области, а само 3-пространство образует границу между ними, обладающую бесконечно малой толщиной в четвертом измерении.

Две плоские фигуры (например, два треугольника), если они лежат в одной плоскости, могут частично перекрываться, но пересекаться они будут лишь в том случае, если лежат в различных плоскостях. Аналогично два объемных тела (например, два куба), если они лежат в одном и том же 3-пространстве, могут частично перекрываться, но пересекаться они будут лишь в том случае, если лежат в различных 3-пространствах. В гиперпространстве мы встречаемся со следующими возможными случаями пересечения. Гипертело и 3-пространство пересекаются, образуя трехмерное тело. Два 3-пространства пересекаются по некоторой плоскости, три 3-пространства пересекаются по прямой, четыре 3-пространства пересекаются в одной точке, 3-пространство и плоскость пересекаются по прямой, 3-пространство и прямая пересекаются в одной точке и две плоско-

сти пересекаются в одной точке. Если пересечение находится в бесконечности, то говорят, что такие элементы параллельны. Если два 3-пространства параллельны, то все фигуры или тела в одном 3-пространстве расположены на равных расстояниях от другого 3-пространства. В случае плоскостей существуют два случая параллельности, и параллельные плоскости либо абсолютно, либо неабсолютно параллельны в зависимости от того, расположены ли они в одном и том же или в различных 3-пространствах (или в зависимости от того, как они пересекаются в бесконечности: по прямой или лишь в точке).

На плоскости к данной прямой в данной точке можно восставить лишь один перпендикуляр. В 3-пространстве можно провести бесконечно много перпендикуляров, образующих плоскость, перпендикулярную данной прямой, а в гиперпространстве бесконечное множество плоскостей, перпендикулярных данной прямой, образуют 3-пространство, перпендикулярное данной прямой. В четырехмерном пространстве 3-пространство может также быть перпендикулярным плоскости или другому 3-пространству. Говоря о перпендикулярных плоскостях в четырехмерном пространстве, следует различать два случая: неабсолютно перпендикулярные и абсолютно перпендикулярные плоскости. Отличаются они тем, что неабсолютно перпендикулярные плоскости лежат в одном и том же 3-пространстве, а абсолютно перпендикулярные плоскости не принадлежат одному 3-пространству. В последнем случае каждая прямая, лежащая в любой из двух плоскостей, перпендикулярна каждой прямой, лежащей в другой плоскости.

Положение точки на плоскости можно задать, указав, на каком расстоянии она находится от каждой из двух перпендикулярных прямых. Положение точки в нашем пространстве мы определим, если будет известно, на каком расстоянии она находится от каждой из трех взаимно перпендикулярных плоскостей, а положение точки в гиперпространстве будет определено, если мы зададим расстояния от этой точки до каждого из четырех взаимно перпендикулярных 3-пространств. В гиперпространстве эти расстояния мы будем измерять вдоль четырех взаимно перпендикулярных прямых, которые, если разбить их на пары, образуют шесть взаим-

но перпендикулярных плоскостей, а если выбрать из них всеми возможными способами тройки, определяют четыре взаимно перпендикулярных 3-пространства, о которых мы упомянули выше. В нашем пространстве плоскость определяется по крайней мере тремя точками. В гиперпространстве, для того чтобы определить 3-пространство, необходимы по крайней мере четыре точки. 3-пространство можно также определить при помощи двух непересекающихся прямых или при помощи плоскости и не принадлежащей ей точки.

Так же как части нашего пространства ограничены поверхностями, плоскими или искривленными, части гиперпространства ограничены гиперповерхностями (трехмерными), то есть плоскими или искривленными 3-пространствами. Гиперпространство содержит не только бесконечно много плоских 3-пространств, аналогичных нашему пространству, но также бесконечно много искривленных 3-пространств, или гиперповерхностей различных типов. Например, гиперсфера представляет собой замкнутую гиперповерхность, все точки которой находятся на равном расстоянии от ее центра. Пять точек, не лежащих в одном и том же 3-пространстве, полностью определяют гиперсферу, подобно тому как четыре точки, не лежащие в одной и той же плоскости, полностью определяют сферу, а три точки, не лежащие на одной и той же прямой, определяют окружность. Все плоские сечения гиперсферы имеют форму окружностей, а все ее сечения 3-пространствами — форму сфер. Гиперсфера радиуса R , проходящая через наше пространство, казалась бы нам сферой, радиус которой постепенно увеличивается от 0 до R , а затем убывает от R до 0.

В то время как в нашем трехмерном пространстве существует лишь пять правильных многогранников (тел, ограниченных равными правильными многоугольниками), а именно: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр, в гиперпространстве существует шесть правильных гипертел, ограниченных равными правильными многогранниками. Перечислим их: C_5 (гипертело, ограниченное 5 тетраэдрами), C_8 (гипертело, ограниченное 8 кубами), C_{16} (гипертело, ограниченное 16 тетраэдрами), C_{24} (гипертело, ограниченное 24 октаэдрами), C_{120} (гипертело, ограниченное 120 додекаэдрами), и C_{600} (гипертело, ограниченное 600 тетраэдрами). Ма

тематики подробно изучили все правильные гипертела и построили модели их проекций в наше пространство. Из всех правильных гипертел простейшим является C_3 (или гиперкуб), потому что все его грани взаимно перпендикулярны, хотя их и больше, чем у C_5 . Гиперкуб служит стандартной единицей при измерении гиперобъема в 4-пространстве. Для получения гиперкуба достаточно переместить куб в направлении, перпендикулярном нашему пространству, на расстояние, равное длине ребра куба. На рис. 1 пунктиром показаны прямые, лежащие в гиперпространстве. $ABCDEFGH$ озна-

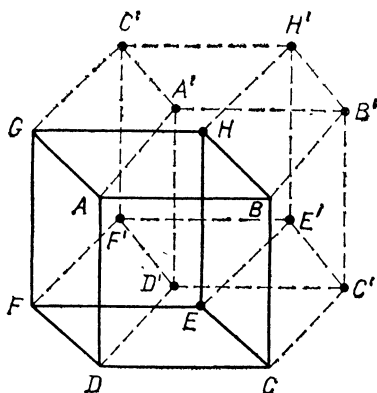


Рис. 1.

чает символически начальное положение куба, а $A'B'C'D'E'F'G'H'$ — его конечное положение. Направление AA' по предположению перпендикулярно нашему пространству. Проектируя ребра гиперкуба на наше пространство (имеется в виду, что мы не опускаем перпендикуляры из вершин гиперкуба на наше пространство, а проводим прямые из некоторой близко лежащей точки, проходящей через вершины гиперкуба), мы получаем проволочную модель, изображенную на рис. 2. Восемь граничных кубов представлены на этой модели в следующих проекциях: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), (5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), (9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16), (13, 14, 15, 16, 1, 2, 3, 4), (1, 5, 9, 13, 2, 6, 10, 14), (2, 6, 10, 14, 3, 7, 11, 15), (3, 7, 11, 15, 4, 8, 12, 16), (4, 8, 12, 16, 5, 9, 13, 1).

Форма гиперкуба обусловлена взаимным расположением восьми перечисленных кубов. Сам же гиперкуб содержит бесконечно много кубов так же, как трехмерный куб содержит бесконечно много квадратов. При движении куба, порождающем гиперкуб, вершины исходного куба порождают ребра, ребра исходного куба — грани (квадраты), а грани исходного куба — кубы, ограничивающие гиперкуб. Это позволяет подсчитать число элементов гиперкуба.

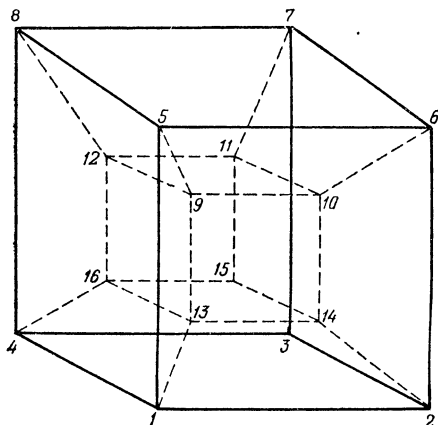


Рис. 2.

Каждая вершина гиперкуба принадлежит одновременно четырем взаимно перпендикулярным ребрам, шести граням и четырем кубам, каждое ребро — трем граням и трем кубам, а каждая грань — двум кубам. Таким образом, каждый куб имеет по одной грани, общей с шестью из семи других кубов. Следовательно, гиперкуб можно рассматривать как тело, состоящее из кубов, которые возникли при движении граней исходного куба, а те из кубов, которые лежат в нашем пространстве, параллельны породившим их граням.

	Число вершин	Число ребер	Число граней (квадратов)	Число кубов
В начальном положении куба	8	—	8	16
Возникли при движении	12	8	12	32
В конечном положении куба	6	12	6	24
В гиперкубе	1	6	1	8

Вращение на плоскости может происходить лишь вокруг точки, в 3-пространстве возможно вращение вокруг прямой, а в гиперпространстве — вокруг осевой плоскости. Две симметричные плоские фигуры, например треугольники *A* и *B* (рис. 3), нельзя совместить никаким движением в плоскости, но, повернув один из них на 180° в третьем измерении, мы без труда совместим их.

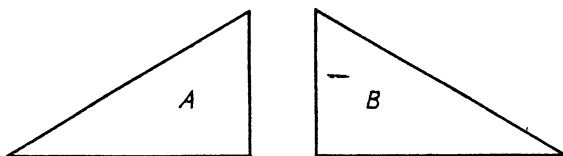


Рис. 3.

Аналогично два симметричных объемных тела (грани которых равны, но расположены в ином порядке), такие, как полые пирамиды *C* и *D* (рис. 4), нельзя совместить никаким движением в нашем пространстве, но, повернув любую из них на 180° в гиперпространстве, мы без труда совместим их. Поворачиваемая пирамида исчезнет из нашего пространства и после поворота на 180°

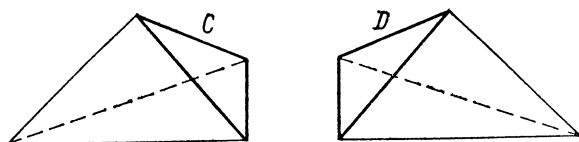


Рис. 4.

и возвращения в наше пространство ее легко будет «надеть» на другую пирамиду. В нашем пространстве два вращательных движения всегда можно заменить одним результирующим движением, аналогичным исходным, но отличающимся от них лишь положением оси вращения. В гиперпространстве в общем случае построить результирующее вращательное движение для двух вращений не удастся. Следовательно, в гиперпространстве существует два различных типа вращательных движений, и тело, совершающее два вращательных движения, находится в совершенно ином состоянии, чем тело,

участвующее лишь в одном вращательном движении. Если тело совершает лишь одно вращательное движение, то целая плоскость в нем остается неподвижной. Если тело совершает двойное вращательное движение, то ни одна его часть не остается неподвижной, за исключением точки, принадлежащей двум плоскостям вращения. Если оба поворота одинаковы, то каждая точка в теле, за исключением неподвижной точки, описывает окружность.

Движение в гиперпространстве отличается большей свободой, чем в нашем пространстве. В нашем пространстве твердое тело обладает шестью степенями свободы, а именно тремя сдвигами вдоль оси и тремя поворотами вокруг оси. Закрепив неподвижно три точки

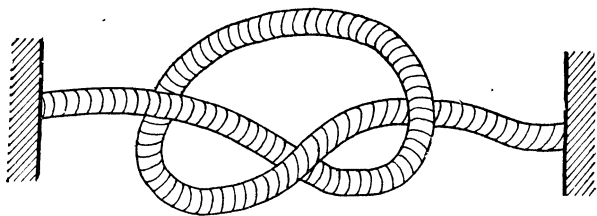


Рис. 5.

твердого тела, мы лишим его способности двигаться вообще. В гиперпространстве твердое тело с тремя неподвижно закрепленными точками по-прежнему сохраняет способность вращаться вокруг плоскости, проходящей через эти точки. Твердое тело в гиперпространстве обладает десятью степенями свободы, а именно четырьмя сдвигами вдоль четырех осей и шестью поворотами вокруг шести плоскостей. Чтобы лишить твердое тело способности двигаться в гиперпространстве, необходимо закрепить четыре его точки.

В гиперпространстве гибкую сферу можно, не растягивая и не разрывая, вывернуть наизнанку. Два звена цепи в четырехмерном пространстве можно развязать, не распиливая ни одно из них. Все наши узлы в четырехмерном пространстве были бы совершенно бесполезны. Например, узел, изображенный на рис. 5, в четырехмерном пространстве можно было бы развязать, оставляя при этом концы веревки по-прежнему прикрепленными

к стенке. В нашем пространстве точка может войти внутрь окружности и выйти из нее, не пересекая при этом саму окружность. В гиперпространстве тело могло бы войти внутрь сферы (или любой другой замкнутой поверхности) и выйти из нее, не пересекая при этом поверхности сферы. Короче говоря, все наше пространство, в том числе и внутренность самых плотных тел, открыто наблюдению и более грубому вмешательству со стороны четвертого измерения, незримо простирающегося в невидимом направлении из каждой точки пространства.

Для чего же понадобилось вводить понятие гиперпространства? Услышав такой вопрос, мы могли бы ответить, что оно позволяет глубже понять геометрию. Например, окружность, рассматриваемая лишь как одномерное множество точек, обладает весьма немногими свойствами, в то время как у окружности на плоскости имеется центр, радиус, касательные и т. д., а окружность в 3-пространстве обнаруживает многочисленные геометрические связи со сферой, конусом и т. д. Аналогичным образом возрастает число свойств любой заданной кривой или поверхности при рассмотрении их в гиперпространстве. Кроме того, в 3-пространстве существуют некоторые одномерные множества (например, винтовая линия), не известные в пространстве двух измерений. В гиперпространстве возможны кривые и поверхности, с которыми нам не приходилось сталкиваться в нашем пространстве. Пространство меньших размерностей содержится в пространстве высших размерностей (если пространства искривлены, то размерности не обязательно должны отличаться на единицу). И так же как понимание планиметрии существенно расширяется при рассмотрении плоских фигур в 3-пространстве, так и многие вопросы стереометрии получают неожиданное освещение при рассмотрении их с точки зрения гиперпространства. Области математики, ранее недоступные геометрии, ныне, с появлением геометрии четырех измерений, обрели свою геометрическую интерпретацию. Наконец понятие четвертого измерения знаменует разрыв между геометрическим пространством и реальным пространством, которое утрачивает свой обязательный характер, и расширяет наш кругозор во многих других отношениях.

Грэхэм Д. Фитч

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ И ЧЕТВЕРТОЕ ИЗМЕРЕНИЕ

Четвертое измерение — побочная ветвь так называемой неевклидовой геометрии, позволившей пролить свет на основания математики и природу пространства.

Более двух тысяч лет Евклид считался неувязимым. Его аксиомы принято было рассматривать как незыблемые законы реального пространства, а его теоремы — как безупречные логические следствия из этих аксиом. Оба мнения оказались ошибочными. Аксиомы Евклида в действительности представляют собой абстрагированные из свойств реального пространства допущения, и его теоремы следуют не только из принятых им аксиом¹. В основе метода Евклида лежит проверка равенства, или конгруэнтности, прямых, углов, плоских фигур и т. д. путем наложения их, и, таким образом, приводимые Евклидом доказательства по существу основаны на интуиции. Аксиому «абсолютной подвижности» (то есть аксиому, предполагающую, что фигуры в пространстве можно свободно перемещать с одного места в другое, не меняя их размеров и формы), которая, например, не выполняется на яйцевидной поверхности, но играет существенную роль при любых геометрических измерениях, Евклид принимает молчаливо, не формулируя ее в явном виде. (Гильберт отверг доказательство путем наложения фигур, ибо само движение основано на некоторых геометрических соображениях и потому не может

¹ О геометрии как абстрактной модели реального пространства («геометрии как физике») и геометрии как дедуктивной системе («геометрии как математике») подробно рассказано во вступительной статье П. К. Рашевского к книге Д. Гильберта «Основания геометрии», Гостехтеоретиздат, М. — Л., 1948. — *Прим. перев.*

служить основанием геометрии.) Другое неявное допущение Евклида состоит в том, что прямую можно неограниченно продолжать. Истинность этого утверждения, справедливого в евклидовой геометрии, нарушается в некоторых неевклидовых геометриях (например, в римановой геометрии).

Евклид доказывает, что «если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны», но доказать вытекающие одно из другого обратное и противоположное утверждения («если внутренние-накрест лежащие углы не равны, то прямые пересекаются», «если прямые параллельны, то внутренние накрест лежащие углы равны») он не смог бы. Чтобы иметь возможность продвигаться дальше, Евклид принял свой знаменитый пятый постулат, который понадобился ему для доказательства важной теоремы о том, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам. Математикам, жившим в более поздние эпохи, этот постулат о параллельных не казался ни самоочевидным, ни не зависимым от остальных аксиом. Его считали ошибочным. На протяжении веков неоднократно предпринимались бесплодные попытки доказать его. И все же Евклид оказался прав. Пятый постулат или какая-нибудь эквивалентная аксиома (например, утверждение о том, что две пересекающиеся прямые не могут быть одновременно параллельными одной и той же прямой) необходим для построения евклидовой геометрии.

Неевклидова геометрия появилась именно из попыток опровергнуть евклидову теорию параллельных. Если пятый постулат действительно содержится в других аксиомах Евклида, то его отрицание должно приводить к противоречию. Но лишь в тридцатых годах прошлого века русский математик Лобачевский и венгр Бойяи независимо друг от друга показали, что отрицание пятого постулата приводит к системе двумерной геометрии, столь же непротиворечивой, как геометрия Евклида. Новая геометрия основана на допущении о том, что через данную точку можно провести по крайней мере две разные прямые, не пересекающие данной прямой.

Предложенное Евклидом доказательство утверждения о том, что сумма углов треугольника не больше двух прямых углов, по-прежнему считалось верным до тех пор, пока в 1854 году немецкий математик Риман не

показал, что в нем непременно должна содержаться ошибка. Действительно, евклидово доказательство не содержало ни одной посылки, которая была бы неверна как в сферической, так и в плоской геометрии треугольников, и тем не менее заключение теоремы для сферических треугольников было неверным. Опираясь на этот факт, Риман показал далее, что можно построить еще одну непротиворечивую геометрию двух измерений, основанную на допущении о том, что через данную точку нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной прямой.

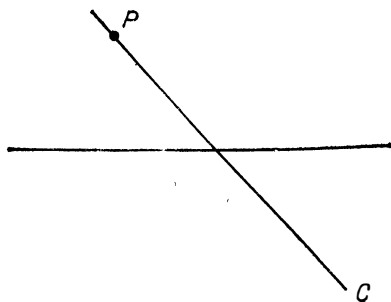


Рис. 1.

Итак, мы имеем три непротиворечивые геометрии двух измерений, как правило, однако, противоречащие друг другу.

Рассмотрим прямую PC (рис. 1), вращающуюся против часовой стрелки вокруг точки P . Логически возможны три различных случая. Когда вращающаяся прямая перестанет пересекаться с горизонтальной прямой справа, то она либо немедленно пересечет ее слева, либо в течение некоторого времени будет поворачиваться вокруг точки P и лишь затем пересечет горизонтальную прямую слева, либо, наконец, в течение некоторого времени будет пересекать горизонтальную прямую и справа, и слева. Первая возможность приводит к евклидовой геометрии, вторая — к геометрии Лобачевского и третья — к римановой геометрии.

То, что в одной геометрии считается прямой, отнюдь не является прямой в другой геометрии, но во всех трех

геометриях прямая является кратчайшим расстоянием между двумя точками. Такие кратчайшие линии называются геодезическими. В этой связи уместно упомянуть о том, что вплоть до недавнего времени обычную прямую на плоскости мы могли проводить лишь с помощью линейки. Разумеется, при этом необходимо было еще предположение о том, что проведенная линия является прямой. Метод построения прямой был открыт лишь в 1864 году, когда француз Поселье предложил свой семизвенный шарнирный механизм для точного решения задачи о построении прямой. Инверсор Поселье (рис. 2) состоит из двух стержней равной длины, прикрепленных к неподвижной точке A . Другими концами стержни

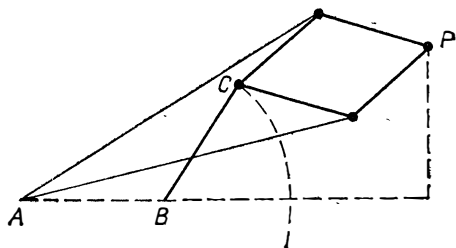


Рис. 2.

скреплены с двумя противоположными вершинами ромба, образованного четырьмя меньшими стержнями равной длины. Наконец, седьмой стержень соединяет вершину C ромба с неподвижной точкой B . Расстояние AB равно длине звена BC . Если точка C будет описывать дугу окружности с центром в точке B , то точка P , как легко доказать средствами элементарной геометрии, опишет прямую, перпендикулярную прямой AB .

Если пространство определить как «любой неограниченный континуум геометрических объектов», то две неевклидовы геометрии, логически ничем не уступающие евклидовой геометрии, следует считать не согласующимися с реальностью до тех пор, пока не будет открыто пространство, для которого они были бы верны. Однако было обнаружено, что риманова геометрия представляет собой не что иное, как геометрию на сферической поверхности (двумерном пространстве

постоянной положительной кривизны), если дуги больших кругов считать геодезическими (кратчайшими линиями). В 1868 году итальянец Бельтрами открыл поверхность, на которой реализуется геометрия Лобачевского, — так называемую псевдосферическую поверхность бесконечной протяженности (двумерное пространство постоянной отрицательной кривизны). В нашем пространстве можно связно представить лишь ограниченные полосы псевдосферы. Псевдосфера представляет собой седловидную поверхность (напоминающую внутреннюю поверхность тора), а выпуклости главных кривизн обращены в противоположные стороны, в силу чего ее кривизна отрицательна. Евклидова геометрия выполняется на плоскости (двумерном пространстве нулевой кривизны). Таким образом, нетрудно видеть, что все три геометрии реализуются в пространствах постоянной кривизны. На псевдосфере прямая имеет на бесконечности две различные точки, на плоскости одну, а на сфере не имеет ни одной.

Аксиома Евклида о том, что между двумя прямыми, или, если рассматривать более общий случай, двумя геодезическими, не заключено пространство, не выполняется в сферической геометрии. Пятый постулат Евклида, утверждающий, что две прямые (то есть две геодезические) пересекаются, если сумма внутренних углов треугольника меньше двух прямых углов, не выполняется в геометрии на псевдосфере. Можно показать, что пятый постулат Евклида не требует и не допускает доказательства, поскольку он по существу является определением того типа пространства, для которого его утверждение верно (то есть определением обычной евклидовой геометрии).

Риман также показал, что существует три логически возможных типа трехмерных пространств, свойства которых аналогичны свойствам перечисленных выше двумерных пространств. Эти пространства отличаются лишь так называемой мерой кривизны пространства (имеется в виду чисто аналитическое выражение, а не кривизна, доступная нашему непосредственному восприятию). Если кривизна пространства равна нулю, то мы имеем дело с евклидовым пространством. Если кривизна положительна, то пространство сферическое, а если кри-

визна отрицательна, то пространство псевдосферическое. В сферическом пространстве кратчайшие линии замыкаются, и макушка нашей собственной головы может служить великолепной моделью такого пространства. Сферическое пространство не имеет границы, но протяженность его конечна, а сумма углов треугольника превышает два прямых угла на величину, пропорциональную площади треугольника. В псевдосферическом пространстве кратчайшие линии уходят в бесконечность так же, как в евклидовом пространстве, но сумма углов треугольника меньше двух прямых на величину, пропорциональную площади треугольника. И в сферическом, и в псевдосферическом пространстве не существует подобных фигур неодинаковой величины, ибо в каждом случае треугольники различной величины должны иметь различные углы.

Ли доказал, что свободное движение может происходить лишь в трех названных нами пространствах. Существуют другие формы неевклидовых пространств, не допускающих свободное движение. Киллинг назвал их пространствами Клиффорда — Клейна.

Имея три различные непротиворечивые геометрии одного ранга для исследования свойств трехмерных точечных множеств, естественно рассматривать пространство любого типа как некое геометрическое место точек в пространстве более высокого числа измерений, а это приводит к рассмотрению пространства четырех измерений, свойство которого в случае нулевой кривизны мы подробно обсудили в предыдущем очерке.

Евклидово пространство, рассматриваемое как совокупность величин, доступных измерению, не соответствует наиболее общему представлению о трехмерном множестве, поскольку удовлетворяет некоторым специальным условиям. Например, евклидовость пространства можно охарактеризовать тремя условиями: 1) свободной подвижностью твердых тел; 2) существованием единственной геодезической, соединяющей любые две точки пространства; 3) существованием параллельных. Но евклидово пространство можно определить и двумя другими условиями: 1) свободной подвижностью и 2) постулатом подобия. Все эти условия не являются необходимыми атрибутами мышления, и если они

выполняются для реального физического пространства, то этот факт необходимо устанавливать опытным путем так же, как это принято в других эмпирических исследованиях, то есть путем наблюдения и эксперимента. Рассуждая чисто логически, мы не можем требовать, чтобы объективный мир непременно соответствовал нашей субъективной интуиции.

Однако мы никогда не сможем доказать, что наше пространство является строго евклидовым, поскольку неизбежные ошибки наблюдения приводят к тому, что результаты измерений колеблются в узком интервале. И хотя в пределах, допускаемых точностью измерений, наше пространство, по-видимому, можно считать евклидовым, наши измерения доказывают лишь, что кривизна пространства мала, но не позволяют утверждать, что она равна нулю. В сферической и псевдосферической геометрии разность между суммой углов треугольника и двумя прямыми углами тем больше, чем больше площадь треугольников. Но даже треугольники, построенные в межзвездном пространстве для изучения параллакса светил, исчезающе малы по сравнению с размерами самого пространства, и вопрос о том, будет ли сумма углов достаточно больших треугольников всегда равна двум прямым углам, остается открытым. Даже наши несовершенные измерения могут установить, что в реальном пространстве выполняется геометрия Лобачевского (или Римана). Например, так произойдет, если мы сумеем произвести угловые измерения с точностью до одной миллионной секунды и при этом выяснится, что сумма углов некоторого межзвездного треугольника меньше (или больше) двух прямых углов на две миллионных секунды.

Относительно реального физического пространства мы не можем с уверенностью сказать, является ли оно евклидовым или неевклидовым. Геометрия не может пролить свет на природу реального пространства. Исследование реального пространства — эмпирическая наука, в то время как геометрия представляет собой творение чистого мышления, раздел чистой математики. Говоря о чистой математике, мы имеем в виду некую совокупность гипотетических дедуктивных теорий, каждая из которых состоит из определенной системы исход-

ных неопределяемых понятий или символов и исходных недоказываемых, но непротиворечивых допущений (обычно называемых аксиомами) и логически выводимых из них следствий, полученных строго дедуктивными рассуждениями без обращения к интуиции. В этом смысле чистая математика представляет собой не что иное, как символическую или формальную логику. Чистая математика занимается извлечением следствий, а не приложениями. С другой стороны, естественные науки, носящие эмпирический характер и всецело зависящие от наблюдения и эксперимента, не могут достичь абсолютной точности и поэтому не могут стать строго математическими. Таким образом, достоверность геометрии зиждется лишь на необходимости, с которой ее выводы следуют из непротиворечивых посылок. Чистая математика не занимается вопросом о том, в какой мере полученные выводы применимы к материальному миру. Таким образом, геометрия, если говорить о ее приложении к реальному миру, полезна, хотя к ее выводам следует относиться с известной осторожностью.

Из того факта, что все разделы чистой математики, включая геометрию, носят строго дедуктивный характер, и в действительности представляют собой не что иное, как формальную логику, следуют важные философские выводы. Они решительно опровергают Канта, который основывал всю свою философию на предполагаемой возможности образования «синтетических априорных суждений», то есть получение абсолютной истины интуитивным чистым мышлением, совершенно независимо от опыта. Для подтверждения своей точки зрения Кант ссылался на существование геометрии. Такой аргумент мог считаться неопровержимым лишь до открытия неевклидовой геометрии. Другой далеко идущий вывод сводится к следующему. Метафизические аксиомы представляют собой лишь имитацию геометрических аксиом и, подобно последним, будут отброшены. Поэтому нам представляется уместным закончить наш очерк следующими словами знаменитого немецкого математика Гильберта: «Наиболее многообещающим и значительным достижением прошлого века следует считать открытие неевклидовой геометрии».

Платониды¹

ГРАНИЦА ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЕДИНИЧНОГО ГИПЕРКУБА И ДРУГИЕ ОСОБЕННОСТИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Школьник рано знакомится с измерением отрезков, площадей и объемов. Измеряя отрезок, школьник находит его длину. Измеряя площадь фигуры, школьник разбивает ее на квадраты или прямоугольники, поскольку ему известно, что площадь прямоугольника равна произведению ширины на высоту. Измеряя объем тела, школьник разбивает его на несколько прямоугольных параллелепипедов или кубов, поскольку ему известно, что объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению длины на ширину и на высоту. Отрезок имеет одно измерение (длину), прямоугольник — два взаимно перпендикулярных измерения (длину и ширину), прямоугольный параллелепипед — три измерения, каждое из которых перпендикулярно двум другим (длину, ширину и высоту). Изобразим единицы линейных, квадратных и кубических мер (например, сантиметр, квадратный сантиметр и кубический сантиметр) в виде отрезка AB , квадрата $ABCD$, сторона которого равна отрезку AB , и куба $ABCDEFGH$, ребро которого по длине совпадает с отрезком AB , а грань имеет размеры квадрата $ABCD$ (рис. 1). Единичный отрезок AB можно считать состоящим из бесконечно большого числа M точек, распределенных непрерывно от одного конца A отрезка до другого конца B .

Тогда квадрат $ABCD$ содержит $M \times M = M^2$ точек, а куб $ABCDEFGH$ содержит $M \times M \times M = M^3$ точек².

¹ Девиз участника конкурса. — *Прим. перев.*

² Буквой M здесь обозначена мощность континуума, которая не удовлетворяет неравенству $N^2 > N$ (или $N^3 > N$), справедливому лишь для всех конечных чисел $N > 1$. Являясь величиной совсем

Из любой точки отрезка AB в любую другую точку того же отрезка можно перейти, двигаясь в одном фиксированном направлении, а именно в направлении отрезка AB . Аналогично из любой точки квадрата $ABCD$ в любую другую его точку можно перейти, двигаясь вдоль двух фиксированных направлений, параллельных двум сторонам квадрата, сходящимся в одной вершине, а из любой точки куба $ABCDEFGH$ в любую другую его точку можно попасть, двигаясь вдоль трех фиксированных направлений, параллельных трем ребрам куба,

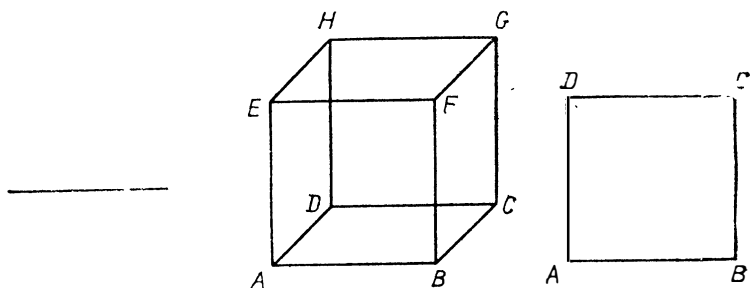


Рис. 1.

сходящимся в одной вершине (направление вперед и назад при движении вдоль любого направления мы не различаем). Таким образом, если говорить о движении, переводящем одну точку фигуры в другую, то единичный отрезок следует считать одномерным, единичный квадрат — двумерным и единичный куб — трехмерным.

В трехмерном пространстве нет такого движения, которое нельзя было бы разложить на движение по трем взаимно перпендикулярным направлениям. На Земле нет такой точки, которой нельзя было бы достичь, двигаясь на север или на юг, на запад или восток и вверх или вниз. В комнате нет ни одной точки, до которой нельзя было бы добраться, двигаясь вдоль длины, ширины и высоты. Зрение позволяет нам воспринимать

другой природы — одним из типов бесконечности, M (хотя она и больше 1, как, впрочем, и любого другого *конечного* числа) подчиняется иной, менее привычной арифметике: $M^2 = M$ (или $M^3 = M$)! — *Прим. перев.*

непосредственно лишь два измерения предмета (ширину и высоту), в то время как третье измерение (расстояние до предмета) мы оцениваем по мышечному усилию, необходимому для того, чтобы сфокусировать глаза на интересующем нас предмете. Мы не обладаем органом чувств, способным воспринимать четвертое измерение, перпендикулярное трем остальным измерениям. Весь человеческий опыт позволяет нам довольствоваться тремя измерениями.

Но оставим опыт и обратимся к рассуждениям по аналогии. Четвертое измерение можно ввести следующим образом. Объем четырехмерного куба равен произведению длины, ширины, высоты и некоторого четвертого измерения. Чтобы вычислить объем четырехмерного прямоугольного параллелепипеда, необходимо произвести четыре линейных измерения, причем каждое в направлении, перпендикулярном трем остальным. Следовательно, четвертое измерение образует прямой угол с каждым из трех направлений, вдоль которых мы измеряем длину, ширину и высоту трехмерного прямоугольного параллелепипеда. Четырехмерный единичный куб должен иметь ребро, совпадающее с отрезком AB , грань, совпадающую с квадратом $ABCD$, и основание, совпадающее с кубом $ABCDEFGH$. Четырехмерный единичный куб содержит $M \times M \times M \times M = M^4$ точек. Перейти из одной его точки в любую другую можно, двигаясь в четырех фиксированных направлениях, параллельных четырем его ребрам, сходящимся в одной вершине.

Квадрат $ABCD$ (рис. 1) мы получим из отрезка AB , передвинув этот отрезок со всеми его M точками на расстояние, равное 1 см в направлении, перпендикулярном единственному измерению отрезка AB . Каждая точка отрезка AB при движении описывает некоторый отрезок, и, таким образом, квадрат $ABCD$ содержит M отрезков, так же как и M^2 точек. Куб $ABCDEFGH$ мы получим из квадрата $ABCD$, сдвинув квадрат $ABCD$ на расстояние, равное 1 см, в направлении, перпендикулярном двум измерениям квадрата. При движении M отрезков и M^2 точек квадрата опишут соответственно M квадратов и M^2 отрезков. Следовательно, куб $ABCDEFGH$ содержит M квадратов, M^2 отрезков и M^3 точек. Аналогично четырехмерный единич-

ный куб мы получим из трехмерного куба $ABCDEFGH$, передвинув этот куб на расстояние, равное 1 см, в направлении, перпендикулярном каждому из трех измерений куба, то есть в направлении четвертого измерения. При движении M квадратов, M^2 прямых и M^3 точек трехмерного куба $ABCDEFGH$ опишут соответственно M кубов, M^2 квадратов и M^3 отрезков. Следовательно, четырехмерный единичный куб содержит M кубов, M^2 квадратов, M^3 отрезков и M^4 точек. Обратимся теперь к рассмотрению элементов, образующих границы единичных отрезков, квадратов, кубов и четырехмерных кубов. У единичного отрезка AB имеются две граничные точки («вершины»). У единичного квадрата $ABCD$ — четыре вершины, у единичного куба $ABCDEFGH$ — восемь вершин (по четыре от начального и конечного положения производящего квадрата), а у четырехмерного единичного куба — 16 вершин (по восемь вершин от начального и конечного положения производящего куба). Подсчитаем число ребер. У единичного отрезка AB есть лишь одно ребро (сам отрезок AB). У единичного квадрата $ABCD$ — четыре стороны, («ребра»), у единичного куба $ABCDEFGH$ — двенадцать ребер (по четыре ребра от начального и конечного положений производящего квадрата и четыре ребра, описанных четырьмя вершинами производящего квадрата), а у четырехмерного единичного куба тридцать два ребра (по двенадцать ребер от начального и конечного положений производящего куба и восемь ребер, описанных восемью вершинами производящего куба). Подсчитаем теперь число граней. У единичного квадрата $ABCD$ есть лишь одна грань (сам квадрат $ABCD$). У единичного куба $ABCDEFGH$ имеется шесть граней (по одной грани от начального и конечного положения квадрата $ABCD$ и четыре грани, описанные сторонами производящего квадрата), а у четырехмерного единичного куба имеются двадцать четыре грани (по шесть граней от начального и конечного положений производящего куба и двенадцать граней, описанных ребрами производящего куба). Подсчитаем наконец число граничных кубов. У куба $ABCDEFGH$ есть лишь один граничный куб (сам куб $ABCDEFGH$), а у четырехмерного единичного куба имеется восемь граничных кубов (по одному кубу от начального и конечного положения производящего куба

и шесть кубов, описанных гранями производящего куба).

Предположим, что граница квадрата $ABCD$ сделана из проволоки. Перерезав проволоку в вершине D , мы сможем развернуть границу квадрата и совместить ее с прямой, на которой лежит отрезок AB . При этом у нас получится одномерная фигура (рис. 2) длиной в четыре

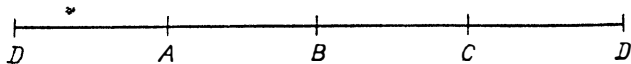


Рис. 2.

единицы. По обе стороны исходного единичного отрезка AB располагаются единичные отрезки DA и BC . Кроме того, к отрезку BC примыкает еще один единичный отрезок CD . Предположим теперь, что грани куба $ABCDEFGH$ сделаны из тонкой фольги. Разрезав фольгу вдоль ребер EF, GH, HE, AE, BF, CG и DH , мы сможем развернуть поверхность куба на плоскость и

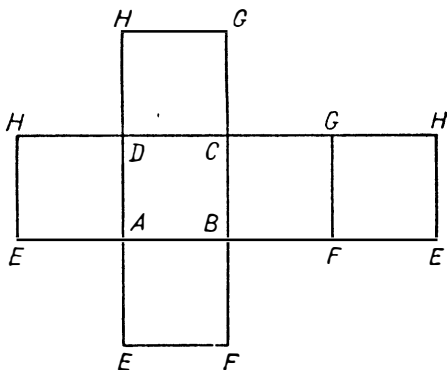


Рис. 3.

получим двумерную фигуру, составленную из шести квадратов. К квадрату $ABCD$ с каждой стороны примыкают единичные квадраты. Кроме того, к одному из таких квадратов примыкает еще один единичный квадрат $FENH$ (рис. 3). Аналогично если предположить, что кубы, ограничивающие четырехмерный единичный куб, сделаны из дерева и мы провели распилы вдоль

соответствующих граней, то граничные кубы можно будет развернуть в трехмерную фигуру, составленную из восьми единичных кубов. К каждой грани куба $ABCDEFGH$ примыкает по одному кубу. Кроме того, к свободной грани одного из примыкающих кубов «приклеен» еще один куб (рис. 4). Восемь кубов, образующих трехмерную фигуру, изображенную на рис. 4, составляют границу четырехмерного куба.

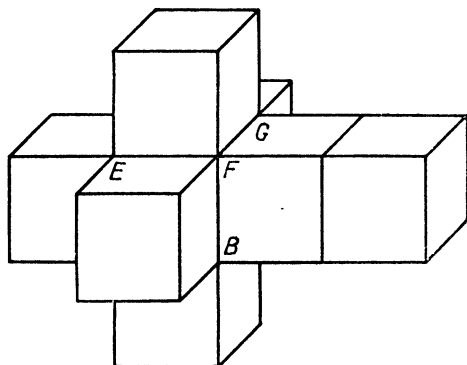


Рис. 4.

Ниже перечислены элементы, составляющие единичный отрезок, квадрат, куб и четырехмерный куб, а также их границы.

	Число точек	Число отрезков прямых	Число квадратов	Число кубов
Одномерный отрезок	M	1	0	0
Двумерный квадрат	M^2	M	1	0
Трехмерный куб	M^3	M^2	M	1
Четырехмерный куб	M^4	M^3	M^2	M

	Число вершин	Число ребер	Число граней (квадратов)	Число трехмерных граней (кубов)
Граница одномерного отрезка	2	1	0	0
Граница двумерного квадрата	4	4	1	0
Граница трехмерного куба	8	12	6	1
Граница четырехмерного куба	16	32	24	8

Приведенные выше рассуждения допускают непосредственное обобщение на случай единичного куба и более высоких размерностей.

Если одномерный отрезок неограниченно продолжить вправо за точку *B* и влево за точку *A*, так что длина его превзойдет любое сколь угодно большое число, то получится одномерное пространство. Аналогичным образом двумерное, трехмерное и четырехмерное пространства мы получим, неограниченно продолжив в обе стороны единичный квадрат, куб и четырехмерный куб.

Одномерный единичный отрезок отделен от остальной части одномерного пространства, в котором он лежит, двумя точками. Двумерный единичный квадрат отделен от остальной части двумерного пространства, в котором

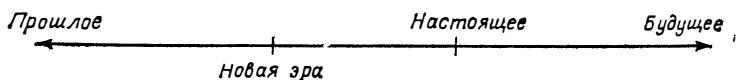


Рис. 5.

он расположен, четырьмя отрезками (сторонами). Трехмерный единичный куб отделен от остального пространства шестью квадратами. Аналогично четырехмерный единичный куб отделен от остальной части четырехмерного пространства, в котором он лежит, восемью кубами. Предположим, что мы хотим построить замкнутую фигуру любого числа измерений в пространстве того же числа измерений. Тогда в одномерном пространстве нам понадобятся для этого две точки, в двумерном пространстве — по крайней мере три прямые, в трехмерном пространстве — по крайней мере четыре плоскости и в четырехмерном пространстве — по крайней мере пять трехмерных пространств.

Так же как и в единичном отрезке, квадрате, кубе и четырехмерном кубе, из одной точки пространства в другую мы можем попасть, двигаясь вдоль фиксированных взаимно перпендикулярных направлений, число которых совпадает с размерностью пространства.

Время можно представить в виде одномерного пространства, ибо оно течет лишь в одном направлении из бесконечно далекого прошлого в бесконечно удаленное будущее (рис. 5). Настоящее время можно изобразить

точкой, перемещающейся с постоянной скоростью по шкале времени (или неподвижной точкой, относительно которой равномерно перемещается шкала времени). Любого момента времени можно достичь, пройдя определенное расстояние (годы, месяцы и т. д.) от некоторой выбранной точки (начала новой эры).

Любая часть земной поверхности, если рассматривать ее как плоскость, представляет собой область двумерного пространства. Следуя по меридианам и параллелям, мы всегда можем добраться до любой точки земной поверхности. Примером трехмерного пространства может служить пространство, в котором находится наша Вселенная. Представить себе наглядно четырехмерное пространство невозможно.

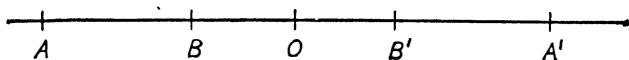


Рис. 6.

Если два отрезка AB и $B'A'$, принадлежащие одному и тому же одномерному пространству, симметричны относительно точки O этого пространства (рис. 6), то отрезок AB нельзя передвинуть в этом пространстве так, чтобы соответственные точки симметричных отрезков совпали (точка A с точкой A' , точка B с точкой B' и т. д.). Для того чтобы совместить соответственные точки симметричных отрезков, необходимо повернуть отрезок AB в двумерном пространстве вокруг точки O как вокруг центра. Грубо говоря, отрезок AB нужно поднять в двумерное пространство, перевернуть и лишь после этого наложить на отрезок $B'A'$. Если два треугольника, лежащих в одном и том же двумерном пространстве, симметричны относительно прямой (рис. 7), то наложить их так, чтобы соответственные линии и точки совпали, можно лишь в том случае, если мы повернем один треугольник в трехмерном пространстве вокруг оси симметрии. Если не стремиться к особой строгости, то можно сказать, что один треугольник необходимо поднять над плоскостью в трехмерное пространство, перевернуть и лишь тогда наложить его на другой треугольник. Если два многогранника лежат в одном и том же трехмерном пространстве и симметричны относительно плоскости

(рис. 8), то совместить их так, чтобы соответственные точки, ребра и плоскости совпали, можно лишь в том случае, если мы повернем один многогранник в четырехмерном пространстве вокруг плоскости симметрии. Грубо

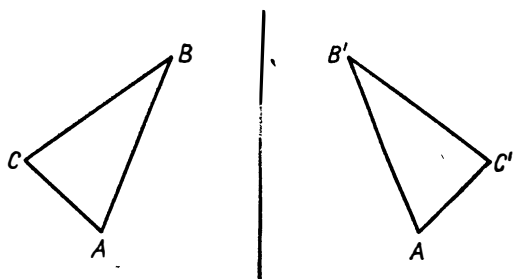


Рис. 7.

говоря, это означает, что мы поднимаем многогранник в четырехмерное пространство, поворачиваем его там и опускаем снова в исходное трехмерное пространство. Правая рука и ее зеркальное отражение (левая рука)

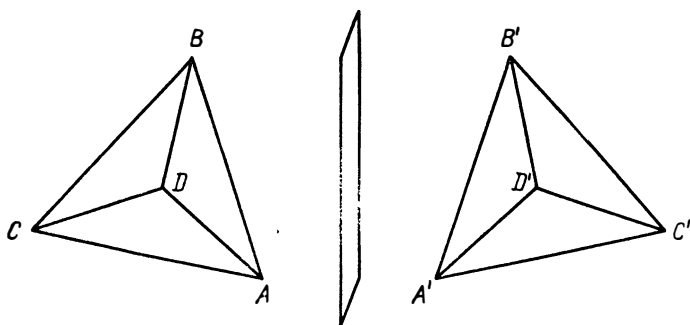


Рис. 8.

симметричны относительно плоскости зеркала, поэтому, повернув правую руку вокруг плоскости зеркала в четырехмерном пространстве, мы могли бы превратить ее в левую. При таком повороте правая перчатка стала бы левой. Иначе говоря, бросив правую перчатку в направлении четвертого измерения и поймав ее вновь, мы увидим, что она стала левой.

Мы не можем указать, в каком направлении проходит четвертое измерение, или определить, существует ли четырехмерное пространство, даже если оно находится совсем рядом, так же как двумерные люди, обитающие в двумерном пространстве, не могут указать, в каком направлении проходит третье измерение или обнаружить существование трехмерного пространства, даже если их собственное пространство вложено в это трехмерное пространство и является его частью (подобно тому, как плоскость является частью трехмерного пространства). Предположим, что двумерное пространство, моделью которого может служить страница нашей книги, населено двумерными существами. Эти существа обладают длиной и шириной, способны передвигаться в длину и ширину и, возможно, даже наделены сознанием. Обитатели двумерного мира не имеют толщины, они не могут ни приподняться над страницей, ни опуститься под нее и лишены способности даже мысленно представить себе направление, перпендикулярное плоскости страницы. Двумерные обитатели страницы не знают, что такое «верх» и «низ». Предположим, что они наделены интеллектом, позволяющим им исследовать свой мир в такой же мере, в какой человек исследует свою Вселенную. Предположим, что у обитателей плоского мира имеются дома, амбары и что жизнь на плоскости течет столь полно, сколь это вообще возможно на плоскости. Дома и амбары в плоском мире не будут иметь ни крыш, ни потолков, а лишь одни стены. Для того чтобы отделить любой предмет на плоскости от остальной части пространства, достаточно провести три прямые. Сам обитатель плоского мира сможет увидеть своего соседа лишь в виде отрезка, так как будет смотреть на его многоугольный контур в плоскости многоугольника. До внутренних точек многоугольника (внутренностей обитателя плоского мира) можно добраться, лишь проникнув сквозь его контур, ибо в плоском мире, как уже говорилось, не существует понятий верх и низ. Убедить обитателя плоского мира в том, что третье измерение существует, прикасаясь к внутренним точкам его многоугольника или пытаясь вывести его из плоскости, — задача совершенно безнадежная. Даже если обитатель плоского мира воспримет рассуждения по аналогии относительно свойств третьего измерения, сама идея о том, что кто-то

может заглянуть в его внутренности, не может не вызвать у него бурного протеста. Даже под прямым углом к двум известным ему измерениям все должно обстоит так же, как в его родном пространстве. Аналогично если мы хотим обнаружить четвертое измерение, то должны понять, что оно проходит через все точки нашего трехмерного пространства, как внутри, так и снаружи нас.

Даже если бы кто-нибудь объяснил обитателю двумерного мира, что трехмерное существо, двигаясь вдоль третьего измерения, могло бы проникнуть в накрепко запертый амбар и похитить все, что там хранится, не открывая ни одной двери и не взламывая стен, или прикоснуться к сердцу жителя книжной страницы, то и тогда третье измерение не стало бы понятнее обитателю плоского мира. Мы также не можем представить себе, в каком направлении должен двигаться четырехмерный грабитель, для того чтобы похитить сокровища из самого надежного сейфа, или путь, по которому четырехмерный врач сможет прикоснуться к самой сокровенной части человеческого сердца, не прорезая при этом ни кожи, ни даже стенки сердца. И все же маршруты и грабителя, и врача лежат вдоль четвертого измерения. Следуя такому маршруту, четырехмерное существо могло бы извлечь содержимое куриного яйца, не нарушив целостности скорлупы, или опустошить бутылку ликера, даже не потрудившись извлечь из нее пробку. Если бы такие четырехмерные существа обитали в пространстве, содержащем наше трехмерное пространство, то нам бы они казались «искуснейшими из духов». Отсутствие подобных духов свидетельствует о том, что четырехмерный мир, который бы содержал наше пространство и был населен столь причудливыми обитателями, в природе не существует.

Алгебра требует, чтобы геометрия помогла ей найти наглядное выражение для любой изучаемой ею задачи. А поскольку в алгебраической задаче могут встречаться четыре, пять или большее число неизвестных, как, впрочем, и любое меньшее их число, то алгебра действительно требует рассмотрения пространств, размерность которых равна четырем, пяти, а также любым другим числам, как бóльшим, так и меньшим. Вероятно, понятие четвертого измерения позволит найти объяснение некоторым физическим явлениям. Вместе с тем следует сознавать,

что пространство четырех измерений, так же как и пространство более высокого числа измерений, представляет собой лишь фиктивные геометрические образы, соответствующие тем или иным алгебраическим величинам.

Перси У. Гумаер

ПРАВДА И ЛОЖЬ О ТЕОРИИ ЧЕТВЕРТОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Нередко теория, развитая из самых лучших побуждений каким-либо выдающимся авторитетом, приобретает дурную славу, ибо становится достоянием невежественных людей, которые приспособливают ее или даже обобщают для своих собственных целей, далеких от первоначальных намерений ее создателя. Печальной жертвой превратностей судьбы такого рода стала теория четвертого измерения.

Идея четвертого измерения появилась как чисто математическое понятие, позволяющее значительно упростить рассуждения, но не допускающее наглядной интерпретации. Аналогию с понятием четвертого измерения можно усмотреть в использовании отрицательных чисел. Всякий, кому приходилось вычитать из числа 3 число 7 и получать -4 , знает, как следует понимать полученный результат. Однако никому и в голову не придет, будто полученный ответ означает, что в действительности могут существовать отрицательные количества предметов. Нетрудно понять, что если в саду росло четыре дерева и спилили четыре из них, то ни одного дерева не стало, но никто не станет представлять себе наглядно минус четыре дерева, ибо даже мысленно мы можем представить себе лишь такие величины, которые получаются в результате пересчета реально существующих предметов. Однако отсутствие опыта не мешает нам вводить отрицательные числа как средство, позволяющее упростить вычисление. Идея четвертого измерения

позволяет аналогичным образом упростить многие математические рассуждения, хотя из нее и не следует, будто четырехмерное пространство действительно существует.

Математические рассуждения позволили нам узнать многие свойства четырехмерного пространства. Иногда эти свойства используют для объяснения спиритических явлений, утверждая, будто четырехмерное пространство населяют духи, которых мы, человеческие существа, живущие в пространстве трех измерений, неспособны воспринимать, если только духи не соблаговолят спуститься в наше пространство. Свое утверждение обоснователи спиритизма пытаются доказать, ссылаясь на геометрические свойства четырехмерного пространства. Столь неожиданное расширение математического понятия создало у непосвященного читателя весьма превратное представление о четвертом измерении, и мы сейчас хотим провести грань между теорией четвертого измерения, развитой математиками и имеющей полное право называться научной теорией, и тем, что известно под названием четвертого измерения и используется для обоснования спиритизма.

Наглядные геометрические изображения широко используются в науке и других областях человеческой деятельности. Чертежи и фотографии находят широкое применение в технике. Ни один архитектор не приступит к возведению здания, не составив предварительно его чертежи. В математике возможность наглядно представить кривую, описываемую алгебраическим уравнением, также намного упрощает рассуждения.

До Декарта алгебру и геометрию считали различными математическими дисциплинами, никак не связанными между собой. Однако Декарт обнаружил, что алгебраические уравнения с двумя и тремя неизвестными удобно изображать в виде геометрических фигур. Рассмотрим метод Декарта на простом примере. Из элементарной алгебры известно, что в одном уравнении с двумя неизвестными, например в уравнении $y = x^2 - 2x + 2$, переменной x мы можем придавать любые значения. Подставив выбранное нами значение x в уравнение, мы найдем соответствующее ему значение неизвестной y . Например, если $x = 1$, то $y = 1$. Нетрудно проверить, что пары значений $x = 2, y = 2$; $x = 3, y = 5$; $x = 4, y = 10$; $x = 5, y = 17$ и т. д. также удовлетворяют

уравнению. Чтобы представить себе уравнение $y = x^2 - 2x + 2$ наглядно, проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые. Эти прямые называются осями координат. От точки пересечения осей вдоль оси x будем откладывать расстояния, равные в соответствующих единицах интересующему нас значению x , а по другой оси — расстояния, равные в соответствующих единицах значениям y . На рис. 1 правые концы отрезков, отложенных по оси x , обозначены буквами a, b, c, d и e , а верхние концы отрезков, отложенные

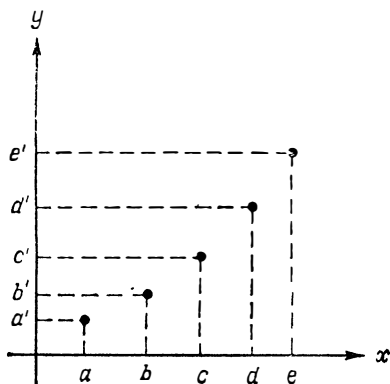


Рис. 1.

вдоль оси y , — буквами a', b', c', d' и e' . Точки (a, a') , (b, b') , (c, c') , (d, d') и (e, e') называются точками кривой, описываемой уравнением $y = x^2 - 2x + 2$. Придавая переменной x значения, отстоящие друг от друга на сколь угодно малую величину, мы сможем нарисовать довольно подробный «портрет» нашей кривой. На рис. 2 показан отрезок кривой, описываемой уравнением $y = x^2 - 2x + 2$, который соответствует значениям x , заключенным в интервале от 0 до 5.

Возможно, что кому-нибудь график кривой покажется столь же мало понятным, как и описывающие кривую уравнения. Неспециалист, взглянув на чертеж, изображающий какой-нибудь предмет, увидит лишь хаотическое переплетение линий, в то время как опытному чертежнику или механику достаточно одного взгляда на чертеж, чтобы получить полное представление об

устройстве предмета. Математик, взглянув на график, получает весьма точное представление о свойствах уравнения, описывающего соответствующую кривую.

Иногда у инженера или математика возникает необходимость наглядно изобразить алгебраическое уравнение, содержащее три неизвестных, например уравнение $x + y + z = 10$. Рассуждая по аналогии с уравнением, содержащим два неизвестных, мы можем получить значения z , соответствующие заданным значениям неиз-

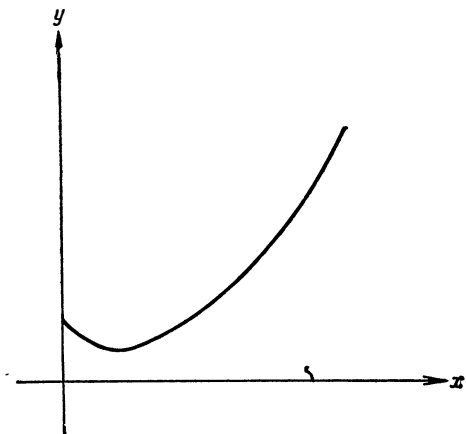


Рис. 2.

вестных x и y . Однако значения переменной z нельзя изобразить на одной плоскости со значениями переменных x и y . Нам необходимо иметь третью ось, ось z , вдоль которой мы будем откладывать значения z , и эта ось должна быть перпендикулярна осям x и y и проходить через точку их пересечения. Введя ось z , мы сможем изобразить наглядно уравнение с тремя переменными так же, как ранее мы изображали уравнение с двумя переменными. Придавая произвольные значения переменным x и y , мы будем вычислять соответствующее им значение переменной z и откладывать все три значения x , y и z , удовлетворяющие уравнению, вдоль соответствующих осей.

Наглядное представление уравнений с двумя и тремя неизвестными настолько помогает в решении трудных

задач, что математик склонен интерпретировать аналогичным образом уравнение с четырьмя переменными, которые иногда встречаются в различных физических задачах. Для того чтобы наглядно изобразить уравнение вида $x + y + z + w = 16$, нам необходимо иметь четвертую ось, ось w , вдоль которой мы сможем откладывать значения переменной w . Такая ось должна быть перпендикулярна осям x , y и z в точке их пересечения. Дойдя в своих рассуждениях до этого места, математики обнаруживают, что зашли в тупик, ибо не могут построить четыре взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в одной точке. Это ограничительное свойство нашего пространства не позволяет математикам наглядно изображать уравнения с четырьмя переменными так же, как они изображали уравнения с двумя и тремя переменными, но это отнюдь не мешает им продолжать изучение уравнений с четырьмя неизвестными.

Люди постоянно размышляют о том, что бы произошло, если бы события развивались иначе, чем они развивались в действительности. Они пытаются предугадать, как развивалась бы история, если бы Наполеон выиграл битву при Ватерлоо. Физик вычисляет количество тепла, которое бы выделилось, если бы Земля внезапно остановилась на орбите. Не отстает от физика и математик. Не имея возможности построить четыре взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в одной точке, он тратит свое драгоценное время, пытаясь выяснить, что произошло бы в том случае, если бы ему все же удалось построить свои четыре перпендикуляра. Эти размышления и приводят математика к понятию четырехмерного пространства.

Возможно, что читатель, впервые услышавший о четырехмерном пространстве, составит себе неверное представление о нем. Когда неспециалист слышит о том, что в четырехмерном пространстве можно построить четыре взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в одной точке, он тотчас же пытается наглядно представить себе эти четыре перпендикуляра. Разумеется, все попытки оказываются бесплодными, и поэтому неспециалист всякое упоминание о четвертом измерении считает жульничеством или бессмыслицей. Однако столь суровый приговор несправедлив, ибо неспециалист неправильно понял то, что имеет в виду, говоря о

четвертом измерении, математик, Математик отнюдь не желает сказать, что четыре взаимно перпендикулярные прямые действительно можно построить. Такое построение, насколько можно судить, действительно невозможно. Однако вполне допустимо спросить себя, что произошло бы в том случае, если бы нам все же удалось осуществить его. Именно это и не более того пытается сделать математик.

Реальная, физическая, возможность и возможность математическая не всегда совпадают. Правильное математическое утверждение нередко может не допускать физическую интерпретацию. Например, так произошло с пятым постулатом Евклида. Утверждение становится возможным с математической точки зрения, если оно непротиворечиво и если оно не противоречит другим допущениям данной теории. Отец геометрии Евклид утверждал в своем пятом постулате, что через данную точку можно провести лишь одну прямую, параллельную некоторой заданной прямой. В первой половине прошлого века русский математик Лобачевский усомнился в правильности постулата Евклида. Многократные попытки доказать этот постулат, рассуждал Лобачевский, неизменно оканчивались неудачей, поэтому можно предположить, что постулат неверен. Будем считать, что через данную точку можно провести не одну, а по крайней мере две разные прямые, не пересекающие данной прямой. Пользуясь чисто математическими рассуждениями, Лобачевский построил целую геометрию, основанную на своей новой аксиоме. Сама по себе эта геометрия абсолютно непротиворечива и поэтому математически возможна. Однако евклидова геометрия проще, привычнее и подтверждается даже самыми точными измерениями. Мы по-прежнему продолжаем пользоваться ею во всех измерениях и расчетах, так как, насколько можно судить по эмпирическим данным, евклидова геометрия правильна.

Наш опыт учит нас, что пространство трехмерно, однако утверждение о трехмерности пространства нельзя доказать абсолютно строго. Его следует принять за аксиому. Если бы какой-нибудь новый Лобачевский потребовал бы у нас подтверждений правильности нашей аксиомы, то мы не могли бы привести никаких убедительных доказательств. Новоявленный преобразо-

ватель геометрии мог бы усомниться в трехмерности пространства и предположить, что пространство четырехмерно. Приняв допущение об истинности новой аксиомы, он смог бы путем дедуктивных рассуждений построить целую геометрию. Новый Лобачевский вывел бы формулы для площади треугольников, объемов тел или для направления касательной к кривой. Пространство четырех измерений математически возможно, поскольку все утверждения и умозаключения относительно его внутренне непротиворечивы и согласуются с исходными аксиомами, однако никакие рассуждения не могут доказать, что четырехмерное пространство действительно существует, так же как Лобачевский не мог бы доказать, что кому-нибудь удастся провести через точку по крайней мере две прямые, не пересекающие третьей.

При рассмотрении уравнений с двумя переменными мы можем, не прибегая к графикам, установить многие свойства кривых, соответствующих этим уравнениям. Производя над алгебраическим уравнением различные действия, математический анализ позволяет вычислять длину любого отрезка кривой, устанавливать направление касательной к кривой в любой точке или находить точки пересечения двух кривых. Метод изучения свойств четырехмерного пространства во многом аналогичен описанным выше методам изучения свойств двумерных и трехмерных пространств. Мы знаем, что любое уравнение с четырьмя переменными соответствует некоторой конфигурации в пространстве четырех измерений. Применяя к уравнению методы аналитической геометрии и математического анализа, мы можем определить свойства интересующей нас плоской фигуры, трехмерного тела или четырехмерного гипертела, описываемых данным уравнением. Для того чтобы изучить свойства четырехмерных тел, нам вовсе не нужно строить их. Так же как мы изучали свойства кривых и поверхностей по их уравнениям, мы можем определить свойства конфигурации, описываемой уравнениями с четырьмя переменными.

Некоторые свойства четырехмерной геометрии настолько своеобразны и неповторимы, что кажутся непостижимыми. Например, полую гибкую сферу в пространстве четырех измерений можно было бы вывернуть

наизнанку, не разрывая и не растягивая ее поверхность. Если какое-нибудь тело могло бы двигаться в пространстве четырех измерений, то его нельзя было бы удерживать четырьмя стенами комнаты и, пройдя ничтожный отрезок в неведомом нам четвертом измерении, такой предмет легко становился бы невидимым. В пространстве четырех измерений предмет можно вращать вокруг плоскости, хотя в пространстве трех измерений предмет может вращаться лишь вокруг прямых или точек.

Подробное изучение столь необычных свойств этого гипотетического пространства, представляющее несомненный интерес, не входит в задачу настоящей статьи. Геометрические доказательства потребовали бы знания довольно тонких математических фактов, а чудес, которые мог бы совершить каждый, кто владеет тайной проникновения в четвертое измерение, хватило бы на несколько популярных статей.

Часто приходится слышать вопрос: существует ли в действительности четвертое измерение? Ответ на этот вопрос зависит от того, что мы понимаем под «существованием». Если существование означает, что мы можем составить полное представление о предмете и это представление не будет противоречить другим ранее установленным представлениям и результатам нашего опыта, то можно сказать, что четырехмерное пространство существует. С другой стороны, если под существованием понимать объективную реальность, то на приведенный выше вопрос можно ответить лишь одно: не знаем.

Все наше знание в конечном счете берется из опыта, но количество и степень воспринимаемого нами ограничено несовершенством наших органов чувств. Существует много явлений, не воспринимаемых непосредственно нашими органами чувств, о которых мы знаем лишь косвенно. Нам известно, что в инфракрасной и в ультрафиолетовой областях спектра существуют световые волны, невидимые нашему глазу. Обычно в тех случаях, когда какое-нибудь явление недоступно наблюдению, это воспринимается как свидетельство того, что оно не существует. Например, в течение долгого времени, исходя из накопленного опыта, полагали, что способностью самостоятельно передвигаться с места на место обладают лишь животные, но не растения. Однако заглянув в усовершенствованный микроскоп, мы увидели, что

микроскопические растения обладают не меньшей подвижностью, чем микроскопические животные. Поэтому не всегда ненаблюдаемое явление следует считать несуществующим. Утверждая, будто ненаблюдаемое явление не существует, мы уподобляемся ребенку, который считает, что у всех людей достаточно пищи, а у всех детей непременно имеются няни. Ребенок рассуждает так потому, что не видел ничего другого. Мы, взрослые, обычно рассуждаем так же.

Хотя мы не можем догматически отрицать существование четырехмерного пространства, несмотря на то что такое пространство недоступно нашему непосредственному восприятию и нам трудно представить себе его наглядно, все же мы можем с уверенностью сказать, что наша Вселенная, по крайней мере в известной нам части, и все сущее в ней в силу какого-то не известного нам закона ограничено пространством трех измерений.

Уильям С. Дэвидсон

ВОСХОДЯЩАЯ ШКАЛА РАЗМЕРНОСТЕЙ

Приступая к выяснению возможности существования размерности, выходящей за рамки наших современных представлений, нам необходимо воспользоваться аналогией. Сравнивая пространства одного, двух и трех измерений, мы сможем подметить то общее, что позволит нам вывести формулы и, глядя на них, высказать абстрактные суждения о свойствах того или иного тела в четырехмерном пространстве. Дабы не впасть в противоречие, нам необходимо быть столь же осторожными в своих умозаключениях, как астроному, пытающемуся высказывать какие-то утверждения относительно обитателей далекой планеты. Рассматривая условия, делающие возможной жизнь на его собственной Земле, он может подметить ряд закономерностей и попытаться привести их в полную гармонию с условиями, господствующими на интересующем его небесном теле.

Хотя реальные изображения прямых и точек имеют ощутимые размеры по всем направлениям, не следует забывать, что всюду далее мы будем иметь в виду абстрактные прямые и точки. Последние характеризуются лишь положением в пространстве, а первые мы определяем как линии кратчайшего расстояния между двумя точками. Говоря о поверхности, мы также будем иметь в виду лишь абстрактную, воображаемую поверхность независимо от того, располагается ли она свободно в пространстве или ограничивает какое-нибудь тело. Такая поверхность полностью лишена толщины, и беско-

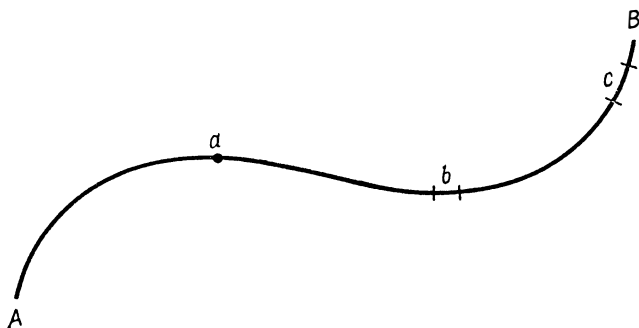


Рис. 1.

нечное множество абстрактных поверхностей, наложенных друг на друга, имело бы нулевую суммарную толщину.

Мы начнем с того, что рассмотрим, как ограничено восприятие пространства у существа, живущего в мире одного измерения, то есть на бесконечной кривой в пространстве, конечный отрезок AB которой мы условно изобразим на рис. 1. Предположим, что в различных точках этой кривой находятся три существа a , b и c , причем существо a имеет вид точки, существо b — небольшого отрезка, а существо c по форме напоминает существо b , но имеет несколько бóльшую длину. Мы различаем существа a , b и c по форме потому, что наблюдаем за ними извне. Однако существу a другое существо b представляется в виде точки, так же как существу b — существо c . Такое «точечное» восприятие обусловлено тем, что одномерным существам известно

лишь расстояние (вдоль кривой) и положение на ней. Все остальное, что так или иначе связано с каким-нибудь третьим геометрическим свойством, для одномерных обитателей кривой лишено смысла. Существо a , наблюдая существо b , может видеть его лишь в виде точки, потому что смотрит «в торец» отрезку b . Предположим, что существа a , b и c сохраняют свое относительное расположение на кривой на протяжении всей своей жизни. Поскольку каждое из существ в этом случае будет располагать лишь весьма ограниченными сведениями о жизни двух других обитателей кривой, то они будут строить различные умозаключения о том, что представляют собой их соседи. Так, существо a , сознавая собственную точечную форму и видя существо b лишь с «торца», сделает вполне логичный, хотя и неправильный вывод: на кривой обитают лишь точечные существа. Существо b , сознавая свою длину и видя своих соседей a и c в виде точек, решит, что оно удостоилось особой милости творца, вознесшего его в нарушение всех законов природы над его собратьями по пространству.

На рис. 1 мы изобразили произвольную кривую, или траекторию, в пространстве, но для того, чтобы избежать излишних усложнений на последующих рисунках, мы в дальнейшем условимся изображать одномерное пространство в виде прямой. Отрезок прямой можно рассматривать как траекторию точки, ограниченную ее начальным и конечным положением в пространстве. Отрезок прямой — это частный случай движения точки из одного положения в другое по кратчайшему пути AB (рис. 2). Если отрезок AB мы передвинем по кратчайшему пути из начального в конечное положение $A'B'$, то получим плоскую фигуру — прямоугольник. Если отрезок AB переместится по кратчайшему пути на расстояние, равное своей длине (рис. 3), то получится плоская фигура, которая называется «квадрат». Таким образом, квадрат можно назвать элементарной фигурой в двумерном мире, так же как отрезок прямой мы называем элементарной фигурой в одномерном мире.

Переходя от линейного мира к плоскому, мы обнаруживаем, что число различных форм геометрических фигур неизмеримо возросло. Так, в нашем двумерном мире могут существовать не только обитатели, имеющие вид точек и прямолинейных отрезков, но и многочисленные

другие фигуры, среди которых мы встретим немало знакомых, например квадрат, прямоугольник, треугольник и окружность. Как и обитатели одномерного мира (рис. 1), двумерные существа могут знакомиться с бесконечным разнообразием окружающих их форм или устанавливать степень родства с другими двумерными



Рис. 2.

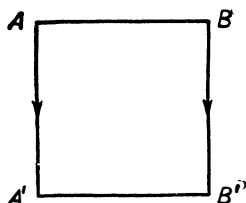


Рис. 3.

существами лишь путем тщательного изучения конфигурации своих соседей. Некоторое представление о том, сколь утомительно однообразное зрелище открылось бы взору наблюдателя в таком двумерном мире, можно получить, если вырезать из бумаги различные по форме

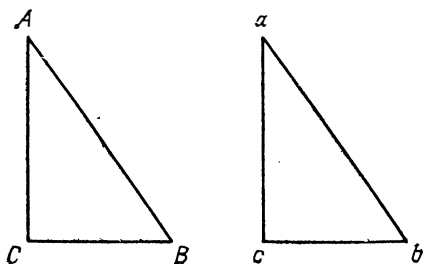


Рис. 4.

фигуры и рассматривать их с «торца». Узкая длинная полоска представилась бы наблюдателю в виде точки или прямолинейного отрезка в зависимости от того, откуда бы он смотрел на полоску: с конца или сбоку. Квадрат, окружность, треугольник и прямоугольник показались бы нашему наблюдателю прямолинейными отрезками различной длины. Неплохо было бы наделить по крайней мере несколько обитателей двумерного

мира разумом, способным воспринимать математические истины. Такие «математически образованные» плоские существа могли бы установить простейшие геометрические свойства фигур. Предположим, что обитатели двумерного мира столкнулись с проблемой доказательства по методу Евклида равенства треугольников ABC и abc (рис. 4), относительно которых известно следующее: сторона AB равна стороне ab , сторона AC равна стороне ac , а угол CAB равен углу cab . Двумерные геометры вполне справились бы с совмещением треугольников ABC и abc , поскольку для этого треугольники не нужно выводить из плоскости.

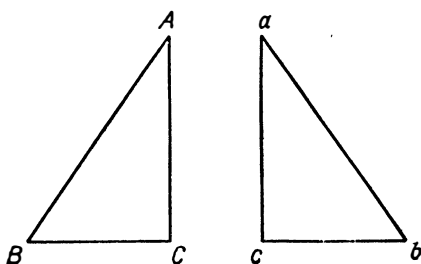


Рис. 5.

Расположим теперь те же треугольники так, как показано на рис. 5. При тех же предположениях относительно равных элементов треугольников ABC и abc может показаться, будто этот случай ничем не отличается от случая, изображенного на рис. 4. Однако более внимательное рассмотрение показывает, что, прежде чем наложить один треугольник на другой, его необходимо перевернуть. Ясно, что такое переворачивание требует трех измерений и предложенное Евклидом доказательство равенства треугольников выходило бы за пределы понимания существ, владеющих лишь понятиями «длина» и «ширина». Предположим теперь, что наш двумерный мир «пронзен» прямой LN (рис. 6), изготовленной из абсолютно пронцаемого материала. Прямую LN можно перемещать параллельно самой себе, не вспарывая при этом плоский мир и не извлекая ее из плоскости. Ясно, что обитатели двумерного мира смогут увидеть лишь точку P . Существа подобного вида встречались им и

раньше. Точка P будет свободно перемещаться по всей плоскости, явно «не желая» расставаться с двумерным миром, хотя в действительности она принадлежит прямой, способной разместиться лишь в трехмерном пространстве.

Перейдем теперь к рассмотрению знакомых всем нам предметов, а именно предметов, находящихся в трехмерном пространстве. Все формы материи, доступные нашим ощущениям, занимают некоторую часть пространства и обладают длиной, шириной и высотой. Плоскость, пря-

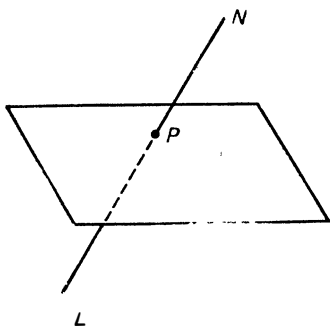


Рис. 6.

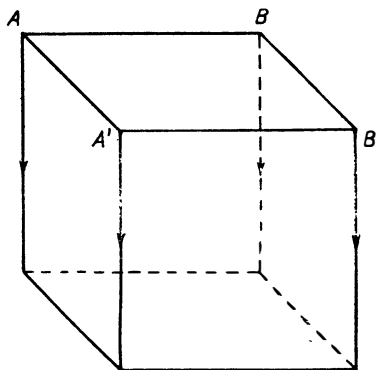


Рис. 7.

мая и точка существуют в теории лишь для того, чтобы человек мог строить приближенные образы в соответствии с тем, что он наблюдает в материальном мире. Природа действует посредством универсальных законов и строит применительно к условиям, руководствуясь неписаными законами экономии. Прямая и плоскость встречаются в природе исключительно редко, главным образом среди низших форм растений и животных, но человек, пренебрегая более тонкими соображениями, определяющими выбор тех или иных средств в природе, и постоянно совершая ошибки, вынужден достигать своих целей простейшими и наиболее прямыми из доступных ему методов. Поэтому он принимает за единицу длины некий отрезок прямой, за единицу площади — плоскую фигуру, известную под названием квадрата, и за единицу объема — тело, ограниченное шестью граня-

ми и известное под названием куба. Мы видели, что на плоскости квадрат можно построить, перемещая отрезок в перпендикулярном ему направлении на расстояние, равное длине отрезка. Аналогично можно построить и куб в трехмерном пространстве. Представим себе, что квадрат $ABA'B'$ (рис. 3) перемещается на расстояние, равное длине любой из его сторон, в направлении, перпендикулярном плоскости квадрата. В результате такого перемещения мы получим (рис. 7) трехмерную фигуру — куб.

Предположим, что исходный отрезок AB , позволивший нам построить квадрат и куб, мы выбрали длиной в два дюйма. Тогда самому отрезку мы могли бы поставить в соответствие число 2, квадрату — число 2^2 , а кубу — число 2^3 . Поскольку существуют числа 2^4 , 2^5 и т. д., геометрический смысл которых неизвестен, естественно возникает вопрос: не могут ли эти числа соответствовать неким объектам, восприятие которых лежит за гранью человеческих возможностей, но было бы доступно каким-нибудь высшим существам, если бы таковые обладали соответствующими органами чувств? Человеческий разум не в силах наглядно представить себе четырехмерное пространство, в котором могло бы находиться тело, соответствующее числу 2^4 , но, рассуждая по аналогии, мы в состоянии выяснить несколько интересных фактов относительно фигуры, играющей в четырехмерном пространстве такую же роль, какую в нашем пространстве играет куб.

Мы видели, что: 1) точки ограничивают отрезок прямой; 2) отрезки прямых ограничивают квадрат; 3) квадраты ограничивают куб. Таким образом, в каждом измерении единичная фигура ограничена единичными фигурами на единицу меньшего числа измерений. Следовательно, четырехмерный аналог куба ограничен трехмерными кубами. Строя квадрат, мы передвинули единичный отрезок по кратчайшему пути из начального положения в конечное, причем длина пути была равна длине самого отрезка. Аналогично куб мы построили, переместив квадрат из начального положения в конечное, отстоящее от начального на расстояние, равное длине стороны квадрата. И в том, и в другом случае движение происходило в направлении, перпендикулярном всем и каждой из границ производящей фигуры.

Отсюда мы заключаем, что и четырехмерный аналог куба можно построить, переместив куб на расстояние, равное длине любого из его ребер, в направлении, перпендикулярном всем ребрам производящего куба. Нашему разуму это направление представляется столь же чуждым и странным, как высота — существу, обитающему в двумерном мире.

При движении отрезка прямой, заматающего квадрат, число границ вновь построенного квадрата было равно удвоенному числу отрезков (исходный отрезок плюс отрезок в конечном положении) плюс два отрезка, порожденные при движении концами исходного отрезка. Аналогично в число граней куба следует включить два квадрата (производящий квадрат в исходном и в конечном положении) плюс четыре квадрата, порожденных при движении четырьмя сторонами исходного квадрата. Отсюда ясно, что в число кубов, ограничивающих четырехмерный аналог куба, должны входить два куба (производящий куб в исходном и в конечном положении), плюс шесть кубов, порожденных при движении гранями исходного куба, то есть всего восемь кубов.

Возвращаясь к квадрату и кубу, нетрудно видеть, что число вершин у построенной фигуры всякий раз оказывается вдвое больше, чем у производящей фигуры. Так, прямолинейный отрезок с двумя конечными точками («вершинами») порождает квадрат с четырьмя вершинами, а у куба число вершин достигает восьми. Следовательно, у четырехмерного аналога куба число вершин равно шестнадцати. Число ребер, или отрезков прямых, соединяющих вершины, можно подсчитать следующим образом. У квадрата четыре стороны («ребра»): две из них образуют производящий отрезок в начальном и конечном состоянии, две другие вычерчивают при движении концы производящего отрезка. У куба двенадцать ребер: восемь из них дает производящий квадрат в исходном и конечном положении, а остальные вычерчивают при движении вершины квадрата. Таким образом, число ребер у каждой фигуры равно удвоенному числу ребер у производящей фигуры плюс те ребра, которые порождают при своем движении вершины производящей фигуры. Следовательно, у четырехмерного аналога куба имеется $12 \times 2 + 8 = 32$ ребра. Итак, четырехмерный аналог куба ограничен восемью кубами, шестнадцатью

вершинами и тридцатью двумя ребрами. Если ребро производящего куба имеет в длину 2 дюйма, то «объем» четырехмерного куба выразился бы числом 2^4 .

Сколь ни любопытными могут показаться приведенные выше геометрические утверждения, они меркнут в сравнении с теми драматическими последствиями, к которым приводит понятие четвертого измерения. Для существа, способного воспринимать лишь длину и ширину, прямая, проведенная нами на плоскости, стала бы столь же непреодолимым препятствием, каким служил бы для нас каменный забор, неограниченно простирающийся в высоту. Но это еще не все. Мы, трехмерные существа, можем дотронуться до любой части внутри плоской фигуры, не прикасаясь к ее границе. Представим себе, что на плоскости внутри некоторой замкнутой кривой находятся несколько двумерных существ. Каково бы было их изумление, если бы они узнали, что некие высшие существа обладают способностью проникать сквозь любое известное им ограждение, даже не прикасаясь к нему! Нечто аналогичное можно представить себе и в нашем мире. Предположим, что существо *A*, запертое в герметически закрытом бронированном сейфе, внезапно обнаруживает рядом с собой некое существо *B*, спустившееся из четвертого измерения.

Из приведенных выше соображений ясно, что если бы мы обладали способностью перемещаться в четвертом измерении, то могли бы без труда съесть мякоть плода, оставив в неприкосновенности его кожуру, или полакомиться орехом, не разбив его скорлупы. Нам не понадобились бы окна и двери для доступа света и сообщения с внешним миром: четвертое измерение лишило бы былой эффективности стены, пол и потолок, ограждающие наше жилище от внешнего мира.

Развитие наших органов чувств происходит очень медленно и, согласно теории эволюции, зависит от того, в какой мере мы пользуемся ими. Поэтому мы вправе утверждать, что сейчас подошли неизмеримо ближе к восприятию четвертого измерения, чем при возникновении этого понятия.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
ЭДВИН Э. ЭББОТТ. ФЛАТЛАНДИЯ	
Предисловие издателя ко второму, пересмотренному изданию	13
Часть I. Этот мир	19
Часть II. Иные миры	71

ДИОНИС БЮРГЕР. СФЕРЛАНДИЯ

Ко второму изданию	128
Предисловие, которое можно и не читать	129
Часть I. Плоский мир	132
Часть II. Конгруэнтность и симметрия	173
Часть III. Искривленные миры	209
Часть IV. Расширяющиеся миры	252

ПРОСТОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ИЗМЕРЕНИЯ

<i>Генри П. Мэннинг. Что такое четырехмерная геометрия?</i>	285
<i>Грэхэм Д. Фитч. Популярное объяснение четвертого измерения</i>	315
<i>Грэхэм Д. Фитч. Неевклидова геометрия и четвертое измерение</i>	325
<i>Платониды. Граница четырехмерного единичного гиперкуба и другие особенности четырехмерного пространства</i>	332
<i>Перси У. Гумаер. Правда и ложь о теории четвертого измерения</i>	343
<i>Уильям С. Дэвидсон. Восходящая шкала размерностей</i>	351

Э. Эбботт

«ФЛАТЛАНДИЯ»

Д. Бюргер

«СФЕРЛАНДИЯ»

Редактор А. Белезцева
Художники С. Мухин, Ю. Ващенко
Художественный редактор Ю. Урманчеев
Технический редактор Н. Чуркина

Сдано в набор 17/VII 1975 г. Подписано к печати 6/I 1976 г. Бумага тип. № 3
84×103/32=5,63 бум. л. Усл. печ. л. 18,90+0,21 фол. Уч.-изд. л. 18,74+0,36 фол.-
зац. Изд. № 12/8328. Цена 1 р. 09 к. Зак. 777

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МЦР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли, 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

1р. 09к.